TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.° 235-OUTUBRO-1953

CIMENTO SECIL

O CIMENTO COM AS MAIORES RESISTÊNCIAS

Fábrica no Outão — Setúbal

Lisboa — Rua do Comércio, 56-3.º

Desde o Distrito de **VIANA DO CASTELO** ao de **LEIRIA** e nos Distritos de **SETÚBAL** e **EVORA** as

FÁBRICAS
CIDADES
VILAS e
ALDEIAS portuguesas

são abastecidas de

ELECTRICIDADE

para

FORÇA MOTRIZ E TODOS OS USOS INDUSTRIAIS, LUZ, ETC., a TARIFAS MUITO VANTAJOSAS e com as **maiores facilidades**,

pela

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

e produzidas nas CENTRAIS:

Thérmica do FREIXO .... 22.000 CV
Hidráulica do LINDOSO.. .... 100.000 CV
Thérmica da CACHOFARRA... 14.000 CV

Os Escritórios da UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA são:

NO PORTO Rua Duque de Loulé, 240
EM LISBOA R. António Maria Cardoso, 13, 2.º

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de todas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia **"CIMENTO TEJO"**

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA DOS ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ano XXVIII - N.º 235 Outubro de 1953

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-N. * TELEF. 70144 (Linha 50

DIRECTOR

JOSÉ MANUEL DA CRUZ MORAIS

ADMINISTRADOR

FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA

CORPO REDACTORIAL

ANTÓNIO SEVERINO PINTO

CARLOS M. NOGUEIRA MARTINS

JOSÉ M. FREITAS CRUZ

LUIZ F. LUCENA FERREIRA

*

NUMERO AVULSO 12$50

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	32$50	50$00	95$00
Colónias Portuguesas e Estrangeiro	—	55$00	100$00

*

EDITOR E PROPRIETÁRIO

ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

*

COMPOSTO E IMPRESSO NA

Tip. JORGE FERNANDES, L.DA

RUA CRUZ DOS POIAIS, 103

LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Obras do Banco Lisboa & Açores — Cravação de estacas Ródio afundadas por prensagem — Pressão de cravação: 100 ton — Empreiteiro: Soc. de Const. Amadeu Gaudêncio, Ltd.ª

Págs

Os pontos de apoio da preparação técnica

Pelo Eng.º Quím.-Ind. Luís A. de Almeida Alves 1

O problema dos materiais numa turbina de gás

Pelo Eng.º Mec. José Henrique Arandes 5

Cálculo de estruturas hiperestáticas

Pelo Eng.º Civ. J. S. Brazão Farinha 15

Revisão dos métodos polarográficos de dosagem do urânio

Pela Eng.º Quím.-Ind. Maria Teresa Águas da Silva 41

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e consumo de energia na rede eléctrica nacional** 59

Do Mundo Técnico 61

Biblioteca 63

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SAO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

UMA ESTACA FRANKI APRESENTA,

em relação a uma estaca de madeira ou prefabricada,

INÚMERAS VANTAGENS

DE ENTRE AS QUAIS DESTACAMOS

GRANDE SECÇÃO

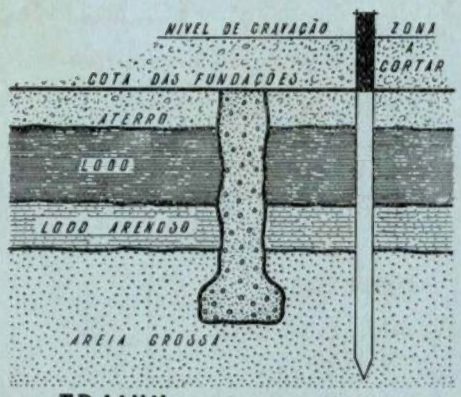
RUGOSIDADE DO FUSTE

BASE ALARGADA

QUE LHE CONFEREM UMA SUPERIOR

CAPACIDADE DE CARGA

E UM MENOR COMPRIMENTO.



SENDO DETERMINADA, PARA CADA ESTACA FRANKI, A PROFUNDIDADE EXACTA A ATINGIR, NUNCA É NECESSÁRIO ACRESCENTAR ESTACAS NEM CORTAR AS RESPECTIVAS CABEÇAS PARA AS NIVELAR.

AS ESTACAS FRANKI SÃO POIS AS MAIS ECONÓMICAS.

FUNDAÇÕES FRANKI

SOCIEDADE CONSTRUTORA PORTUGUESA L.DA

PRAÇA DA ALEGRIA 20 R/C LISBOA

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA

Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

TÉCNICA

DIRECTOR — JOSÉ M. CRUZ MORAIS ADMINISTRADOR — FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA

CORPO REDACTORIAL — ANTÓNIO SEVERINO PINTO, CARLOS M. NOGUEIRA MARTINS, JOSÉ M. FREITAS CRUZ E LUIZ F. LUCENA FERREIRA

Ano XXVIII - N.º 235 Outubro de 1953

C. D. 62 (071.1)

OS PONTOS DE APOIO DA PREPARAÇÃO TÉCNICA

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES

Prof. do I. S. T.

A revista «Chemical Engineering», de Setembro deste ano, pág. 236, inaugurou uma secção com o título sugestivo de «Chemical Engineering Refresher» (1), na qual, como o seu nome indica, se propõe «refrescar» os conhecimentos do engenheiro químico nos domínios de certos capítulos fundamentais: Princípios de termodinâmica, compressão e expansão, equilíbrios químicos, cinética química, equilíbrios físicos, separações e fenómenos vapor-gás.

Na apresentação desta secção, a revista exprime-se do seguinte modo: «Se você é um engenheiro químico a trabalhar nas condições usuais de uma indústria qualquer, há uma probabilidade de nove sobre dez de ter pensado mais de uma vez, «Quem me dera lembrar-me ainda da minha termodinâmica da Universidade. Quem me dera saber bastante mais de cinética química. Será possível que esta reacção se dê — e com um rendimento aceitável? Quais serão as melhores condições de realização? Qual será a quantidade de calor a dissipar numa dada absorpção?». E o mesmo em muitos outros casos.

«Se você saíu há poucos anos da Escola talvez se lembre ainda dos fundamentos e os possa usar com maior ou menor facilidade. Nessas condições, esta secção pode não ser para si. Mas se já se passaram cinco anos ou mais, você já poderá estar talvez «enferrujado». E se foi há 20 ou 30 anos, então não pode esquecer que a sua termodinâmica escolar era dada com um critério muito diferente do de hoje — e a cinética que se aprendia era apenas uma parcela reduzida da sua química-física.

«Por isso, se você tem mais de 27 ou 30 anos, digamos, e se a sua actividade técnica o põe em contacto com reacções químicas, com separações físicas tais como destilação, absorpção ou extracção, com compressões e expansões, com secagem, condensação, humidificação, deshumidificação, condicionamento de ar — então, esta secção é feita para si. Durante um ano ou mais, dar-lhe-emos um apanhado de conhecimentos fundamentais que podem ser por vezes, mais úteis do que aqueles que você aprendeu na Escola. Porquê? Em parte, porque há problemas que você não pode resolver ràpidamente por não estar ao corrente das tendências actuais, e em parte, devido à maneira como esta secção vai ser orientada».

Esta transcrição reveste-se de um certo interesse porque encara o problema da actualização da cultura técnica com apreciável realismo; mas em todo o caso, não deixa

(1) A cargo do Sr. Thomas E. Corrigan, engenheiro de pesquisa da «Mathieson Chemical Corp.», em Niagara Falls.

de ser útil analisar o assunto com um pouco mais de pormenor, a fim de tentar definir as condições de preparação para as quais essa actualização pode ser eficaz.

Na realidade, uma actualização de conhecimentos pode apresentar-se com dois aspectos nìtidamente diferentes:

1) Como simples aquisição de uma ideia geral àcerca das tendências do progresso.
2) Como renovação das técnicas de cálculo e de projecto, com reflexo imediato nas aplicações práticas habituais.

O primeiro aspecto é pràticamente independente da preparação anteriormente adquirida; o segundo, pelo contrário, envolve um problema de receptividade e de assimilação que está directamente relacionado com a orientação do ensino recebido na Escola e em particular, com o grau de desenvolvimento atribuído a um certo número de pontos fundamentais. E estes pontos fundamentais que constituem os pontos de apoio da preparação técnica, representam em última análise, a capacidade potencial de acompanhar as sucessivas actualizações de uma maneira contínua, permanente e segura.

* * *

A rapidez da evolução do progresso técnico dos tempos actuais, introduz duas dificuldades básicas, embora de carácter diferente, nos problemas de actualização:

1) Limitação progressiva do número de conhecimentos que podem ser adquiridos com utilidade imediata e directa, devido à ampliação constante do campo de acção da Engenharia.
2) Impossibilidade prática de seguir sempre com regularidade o andamento da literatura técnica, dado o carácter absorvente de que se revestem certos períodos da vida industrial.

Estas duas dificuldades, que têm necessàriamente de existir em virtude da própria essência da Técnica moderna, só podem ser removidas até certo ponto, se se estabelecerem duas condições de base, indispensáveis ao funcionamento eficiente da estrutura técnica no seu conjunto:

1) Fixação dos tipos de especialização necessários, ou o que é o mesmo, das articulações elementares para as quais, como se viu, (1) o equilíbrio teoria-prática tem de ser perfeito.
2) Criação de um regime de trabalho das articulações mais complexas que lhes permita o estudo sistemático e permanente do progresso teórico. (2)

Estas duas condições são essenciais para manter um ambiente de actualização em todos os níveis da estrutura técnica, mais directamente no primeiro caso e com maior generalidade no segundo. Apesar de tudo, esse ambiente não é totalmente aproveitado se a preparação que se possuir não for suficiente para tornar o estudo rápido e atractivo; e este facto é tanto mais importante, quanto mais complexas são as articulações porque são estas que têm de estabelecer, em cada instante, as directrizes gerais de orientação. Não podem, por isso alhear-se, não só dos progressos concretos das realizações da Enge-

(1) «A Indústria e a Preparação Profissional», *Técnica* n.º 219, Fevereiro de 1952.
(2) «A Estabilidade de Estrutura Técnica», *Técnica* n.º 225, Outubro de 1952.

nharia, como também da evolução dos conceitos científicos fundamentais que impulsionam a pesquisa no sentido dos novos rumos do pensamento.

E por esta razão, a análise dos pontos de apoio da preparação reveste-se de um interesse particular, dentro dos problemas gerais de rendimento, de organização e de progresso.

* * *

Numa sistematização que se fez, há já bastante tempo, sobre a estruturação dos cursos de Engenharia, ([1]) estabeleceu-se o princípio de alicerçar a formação técnica em quatro apoios que se designaram por conhecimentos básicos da Engenharia e que são os seguintes:

1) Resistência de Materiais.
2) Dinâmica dos Fluidos.
3) Teoria do Calor e das Máquinas Térmicas.
4) Teoria da Electricidade e das Máquinas Eléctricas.

Cada um destes conhecimentos constitui uma unidade bem definida, que se obtém à custa de um certo número de bases científicas, cuja articulação eficiente é condição necessária para que a sua aprendizagem seja formativamente sólida e funcionalmente maleável.

Mas, analisando a distribuição que então se fez dessas bases científicas, conclui-se imediatamente que elas se reduzem a três categorias fundamentais:

1) Equações diferenciais.
2) Geometria analítica e cálculo tensorial.
3) Cálculo das probabilidades.

Mas deve notar-se que o estudo destes diferentes capítulos não pode ser reduzido a noções relativamente elementares, salvo no caso do Cálculo Tensorial cuja introdução nos problemas técnicos está ainda bastante incipiente (apenas em alguns problemas de elasticidade e estrutura dos sólidos, dinâmica dos fluidos, fenómenos de adsorpção e circuitos electrónicos). O seu desenvolvimento tem de se estender respectivamente até às equações às derivadas parciais de segunda ordem, às quádricas e cónicas e às leis estatísticas. Por outro lado, não se pode esquecer de que se trata de instrumentos de cálculo de aplicação corrente, sem os quais é impossível apreender integralmente o aspecto quantitativo da evolução dos conceitos e da utilização dos resultados.

Esta argumentação presta-se no entanto, a duas críticas imediatas:

1) O conhecimento profundo de equações diferenciais, de geometria analítica e de cálculo das probabilidades não é pròpriamente um índice de cultura técnica.

2) É possível desempenhar funções técnicas com eficiência, sem recorrer a esta preparação científica.

Qualquer destas críticas não é porém, muito consistente. Em primeiro lugar, porque a afirmação que se fez foi apenas de que esta preparação científica intensa era uma condição *necessária* à aprendizagem dos conhecimentos básicos da Engenharia, com o máximo de rendimento; em segundo lugar, porque nem todas as funções da

---

([1]) «A Orgânica das Aulas Práticas do Instituto Superior Técnico», *Técnica* n.º 184, de Junho de 1948.

vida técnica exigem uma actualização permanente ao nível do domínio *quantitativo* dos fenómenos. O que se pretendeu demonstrar fundamentalmente é que sem uma preparação matemática adequada, não é possível imprimir ao conjunto de *todas* as articulações da estrutura técnica aquele coeficiente de progresso que resulta em parte, da actualização rápida dos conhecimentos alheios e em parte, do tratamento apriorístico, em bases rigorosas, dos problemas novos que se vão apresentando.

Procurar uma actualização constante nos domínios da termodinâmica, da cinética química, ou das separações físicas, por exemplo, sem ter a preparação matemática para a interpretar é enveredar por um «diletantismo» mais ou menos equilibrado mas de pequena repercussão na formação pessoal e no progresso das aplicações.

* * *

É fóra de dúvida de que há uma crítica séria que merece ser encarada com o maior cuidado e que se pode formular nos seguintes termos:

Os métodos matemáticos também vão evoluindo em si e alargando as suas formas de aplicação aos problemas técnicos; por isso, o conhecimento da evolução desses métodos deve também fazer parte da formação técnica.

A afirmação em si, é verdadeira mas tem de ser analisada em face da realidade dos problemas actuais. A matemática, para o engenheiro, é uma ferramenta maravilhosa que lhe permite acertar o rumo e corrigir a evolução; mas é uma ferramenta que tem de ser considerada como directamente utilizável, sem problemas pendentes e sem impossibilidades de resolução.

O engenheiro não se interessa, em príncípio, a não ser por uma questão de cultura geral, pelas dificuldades da matemática enquanto elas não tiverem sido resolvidas, mas aproveita àvidamente os resultados quando eles forem susceptíveis de ter um interesse imediato. Mas também é verdade que os cálculos da Engenharia não podem deixar de se fazer e por isso, vão lançando mão de métodos aproximados — analíticos ou gráficos — em regra mais morosos do que os cálculos exactos, mas no momento, os únicos existentes à sua disposição. Não foi necessário criar os integrais elípticos para fazer o cálculo aproximado do integral definido entre dois limites, das respectivas funções integrandas; mas foi preciso criá-los para avaliar da potencialidade das suas propriedades e aplicações.

Não se pode negar que a matemática que se aprende nos primeiros anos dos cursos superiores de Engenharia é de tal maneira cativante que chega a criar um entusiasmo natural pelos seus problemas intrínsecos. Simplesmente, há que ver até que ponto é possível sobrepor à aprendizagem sólida de equações diferenciais. geometria analítica, e cálculo das probabilidades durante o curto período de dois anos, problemas de matemática pura que, pela sua própria natureza podem inclusivamente fazer esquecer que não é neles que residem as verdadeiras dificuldades da Engenharia.

O problema é relativamente complexo e envolve considerações de carácter pedagógico que não se coadunam com a orientação ligeira deste artigo. Em todo o caso, não se pode perder de vista que, para o futuro engenheiro, para quem a profissão se vai tornando cada vez mais completa nos seus recursos, mais perfeita na sua elaboração e mais rigorosa no seu domínio dos pormenores, são os pontos de apoio com origem numa Matemática sólida e integralmente viva, que constituem a melhor garantia de uma adaptação permanente ao progresso da Técnica e à evolução das bases científicas da sua estruturação.

C. D. 621.438:620.19

O PROBLEMA DOS MATERIAIS NUMA TURBINA DE GÁS

PELO ENG.º MEC. (I. S. T.) JOSÉ HENRIQUE ARANDES
Assistente do I. S. T.

Na escolha dos materiais com que devem ser fabricados os diferentes elementos duma turbina de gás, além da consideração do fenómeno da fluagem, temos que ter em atenção a resistência à corrosão e oxidação. A dilatação térmica desempenha também um papel importante, visto que as peças desigualmente aquecidas devem possuir uma resistência mecânica adequada para suportar as fadigas adicionais impostas pela variação da temperatura através da sua massa. Estas fadigas térmicas são tanto mais elevadas quanto maiores forem os coeficientes de dilatação.

Merece ainda interesse a condutibilidade térmica dos materiais, principalmente quando o escoamento do calor por seu intermédio revestir grande importância.

Pode dizer-se que na concepção duma turbina de gás tem tanta influência a execução dum bom projecto como uma boa escolha dos materiais. Esta interdependência do projecto e dos materiais atinge uma maior importância nas turbinas de gás do que em qualquer outro tipo de máquina.

A propósito dos principais elementos da turbina, indicamos a seguir alguns dos factores específicos a tomar em consideração.

a) *Pás móveis* — Numa turbina de gás, as pás do rótor ou pás móveis são os elementos submetidos às temperaturas mais elevadas e, ainda por cima, a forças centrífugas consideráveis. Da conjugação destes dois factos resulta que é aqui que o fenómeno da fluagem representa o maior perigo.

Em turbinas para fins industriais, em que é fundamental uma longa vida, interessa particularmente a fluagem secundária. Claro que tem também importância o bom conhecimento da fluagem primária ou inicial, principalmente durante os primeiros ensaios, para que as dimensões que porventura se modifiquem e ameacem prejudicar o funcionamento da turbina possam ser rectificadas duma maneira conveniente. Mas depois destes primeiros ajustamentos, em que são compensados ou eliminados os efeitos da fluagem primária, o que sobretudo se torna indispensável é que a velocidade da fluagem secundária, pràticamente constante (Fig. 1), seja a mais baixa possível.

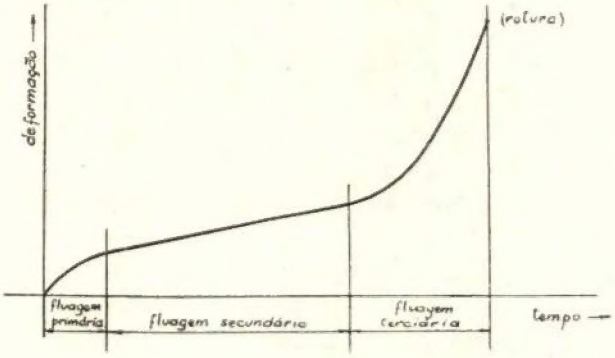


Fig. 1

Por outro lado, a resistência à fluagem deve ser tal que nunca haja o perigo de o material das pás alcançar a fluagem terciária, durante a vida da máquina, pois isso significaria uma rotura iminente. Se juntarmos a isto, a escassês dos conhecimentos a respeito do que se passa durante toda a fluagem terciária, mesmo a partir do seu início, compreenderemos que é muito aconselhável que o material das pás só alcance um determinado período da fluagem secundária, permanecendo até ao fim suficientemente afastado da 3.ª fase da fluagem.

É interessante notar que nas turbinas para motores de propulsão por jacto, é a fluagem primária que adquire a maior importância, quase não interessando a fluagem secundária. Isso justifica-se pelo facto de a vida dessas máquinas estar limitada a

poucas centenas de horas de funcionamento.

Devido aos fenómenos apontados, os aços correntes com que se fabricam as pás duma turbina de vapor mostraram-se completamente ineficazes. Isso foi originado pela elevação da temperatura máxima a ser consentida pelas pás. Ao passo que há uma dezena de anos aquela temperatura máxima não excedia 350° C, numa turbina de vapor, actualmente as pás duma turbina de gás têm de suportar temperaturas que vão de 600° a 800° C, ou mesmo 850° C, para as quais o rendimento térmico passa a tomar valores aceitáveis sob o ponto de vista industrial. Foi só no decorrer da 2.ª guerra mundial que os progressos da metalurgia levaram à descoberta de novos materiais resistentes a grandes esforços simultâneos com elevadas temperaturas (800° a 850° C).

Além da resistência à fluagem, à corrosão e à oxidação, os materiais das pás devem apresentar outras características indispensáveis: estabilidade da sua estrutura às temperaturas elevadas, resistência à fadiga devida a esforços alternados (vibrações), capacidade de amortecimento dessas vibrações a fim de dificultar o fenómeno da ressonância, facilidade de fabrico por trabalho ou fundição, de soldadura e uniformidade de composição.

Os novos materiais podem repartir-se por dois grupos: aços especiais com liga e ligas metálicas, em que as percentagens de ferro e carbono são insignificantes.

Os primeiros, empregados para temperaturas mais baixas, são em geral aços cromo-niquel, mas com percentagens mais ou menos elevadas de outros elementos de liga, em especial de cobalto. O crómio, em percentagens que vão de 12 a 14 %, aumenta a resistência ao fenómeno da oxidação em escamas («scaling») e assegura uma boa resistência mecânica a temperatura não demasiadamente alta. Além disso, uma elevada percentagem de crómio diminui bastante a corrosão a altas temperaturas, o que tem grande importância no caso das pás, submetidas como estão à acção dos gases quentes. A presença do níquel, em percentagens semelhantes às do crómio, aumenta ainda mais a resistência mecânica e diminui ou impede a oxidação. O cobalto é utilizado em percentagens de 10 % e mais, e permite melhorar a forjabilidade. A adição de silício, até cerca de 3 %, aumenta a resistência à oxidação em escamas («scaling») e a resistencia mecânica a altas temperaturas.

Estes aços empregam-se para temperaturas inferiores a 600° — 650° C, visto que acima dos 650° C a resistência mecânica diminui ràpidamente, o mesmo acontecendo à resistência à oxidação em escamas, que desaparece por completo acima de 850° C.

Entre estes aços podemos citar o G. 18 B e o G. 32, produzidos pela firma «William Jessop and Sons, Ltd.», de Sheffield. Como se utilizam sobretudo para a construção dos discos, apresentaremos mais adiante a sua composição química e propriedades mais características.

Estes aços podem ser forjados e, depois de receberem o tratamento térmico necessário, podem ser trabalhados, esmerilados e polidos.

A casa construtora «Brown Boveri» também desenvolveu um aço austenítico com a seguinte composição:

C	Si	Ni	Cr	W	Mg	Fe
0,2	1,2	8	18	1,0	0,6	71

Este aço tem provado bem a temperaturas na visinhança dos 600° C e com fadigas constantes entre os 750 e 800 kg/cm².

Para temperaturas de trabalho mais elevadas tem-se recorrido a ligas metálicas, que podem dividir-se em dois grupos principais: o das ligas forjáveis, que podem ser fàcilmente trabalhadas; e o das ligas de fundição. Estas últimas são preferidas pelos americanos e são mais próprias para temperaturas muito elevadas. Com efeito, muitas dessas ligas não aguentam trabalho de forja ou qualquer deformação a quente e, por isso, tem de ir-se para a fundição das pás pelo processo da «cera perdida». A forma final é obtida por esmerilagem e polimento.

Quanto às ligas forjáveis, elas são usadas sobretudo pelos ingleses, e são constituídas quase exclusivamente por níquel e crómio, andando a percentagem do primeiro à volta dos 80 % e a do segundo dos 20 %. As percentagens de ferro e de carbono são muito baixas, e aqueles elementos apresentam uma estrutura austenítica.

Entre as ligas inglesas têm tido uma grande aceitação as que foram desenvolvidas pela «Mond Nickel Co.», as quais aliam uma grande resistência à corrosão e à oxidação com uma elevada resistência à fluagem. Esta última é conseguida por um tratamento térmico especial da solução sólida de níquel e crómio, com precipitação de de carbonetos de titânio. O titânio desempenha o papel de um agente endurecedor, por precipitação. Outros elementos há que podem usar-se em sua substituição, tais como o berílio, o molibdénio e, às vezes, o carbono. Este último tem, porém, o inconveniente de dificultar o trabalho das ligas.

Uma das primeiras ligas desenvolvidas pela «Mond Nickel Co.» foi o «Nimonic 75», que apresenta as suas qualidades óptimas a uns 750° C, mostrando-se menos favorável para temperaturas inferiores. Porém, as experiências posteriores permitiram verificar que o titânio, na quase ausência do carbono e por meio de um tratamento térmico apropriado, podia conservar a temperaturas mais baixas — 600° a 650° C —as grandes qualidades que o «Nimonic 75» possuía a 750° C. O alumínio também mostrou ser capaz de melhorar as qualidades da liga, mas foram necessárias muitas experiências para determinar as percentagens óptimas de titânio e de alumínio, de modo a conseguir qualidades de resistência a temperaturas elevadas mas mantendo um grau adequado de forjabilidade.

A nova liga recebeu o nome de «Nimonic 80» e tem a seguinte composição química:

C	Mn	Si	Fe	Cr	Ti	Al	Ni
0,04	0,56	0,48	0,44	21,18	2,44	0,63	74,23

Esta é a composição mais empregada, pois há variantes em que a percentagem de carbono pode ir até ao máximo de 0,1 %, as de manganês e de silício até 1,0 % e a de ferro até 5,0 %. Ao mesmo tempo, a percentagem de crómio pode variar entre 19,0 e 22.0 %, a de titânio entre 1,5 e 3,0 % e a de alumínio entre 0,5 e 1,5 %. A percentagem de níquel é sempre a necessária para perfazer os 100 por cento.

Como dissemos, as melhores propriedades são obtidas depois de tratamentos térmicos especiais. Para isso foi preciso determinar as temperaturas e os tempos óptimos, tanto para o tratamento térmico da solução como para o tratamento de precipitação. O tratamento térmico que permitiu obter a maior resistência a fluagem foi o de impregnação durante 8 horas a 1.080° C, seguido de arrefecimento ao ar, dum reaquecimento durante 16 horas a 700° C e de novo arrefecimento:

As propriedades físicas mais importantes desta liga são as seguintes:

Peso específico . . . . 8,2 a 8,25 gr/cm^3

Coeficiente de condutibilidade térmica:

a 100° C . . . . . 0,029 cal/cm . seg.° C
a 900° C . . . . . 0,066 »

Coeficiente médio de dilatação linear:

20 — 100° C . . . . . $11,7 \times 10^{-6}$ /° C
20 — 300° C . . . . . $12,8 \times$ » »
20 — 500° C . . . . . $13,6 \times$ » »
20 — 700° C . . . . . $14,3 \times$ » »
20 — 900° C . . . . . $15,7 \times$ » »

Calor específico médio:

20 — 100° C . . . . . 0,103 cal/gr.° C
20 — 900° C . . . . . 0,128 »

Devido ao fenómeno da fluagem, as deformações — alongamentos — não podem ultrapassar determinado valor durante a vida provável das peças. Para pás de turbinas esse valor é de 0,1 %.

Vejamos qual é a resistência à fluagem do «Nimonic 80». Para temperaturas de trabalho de pás podemos tomar a temperatura dos gases, ou seja, por exemplo, 600° C. Com efeito, numa turbina de reacção, para uma temperatura de 600° C dos gases, a temperatura média das pás anda à volta de 545° C, segundo Godsey e Young.

À temperatura de 600° C, as cargas necessárias para produzir um alongamento de 0,1 % e a rotura por fluagem, são em kg/cm², as seguintes:

Tempo (horas)	Alongamento de 0,1 %	Rotura
100	4.650	5.300
300	4.000	5.100
1.000	3.500	4.650

A rotura verifica-se para um alongamento à volta de 1 %.

Com estes resultados, tentemos obter por extrapolação as cargas que produzem um alongamento de 0,1 % e a rotura por fluagem ao fim de 100.000 horas.

Marcando as cargas em ordenadas e o tempo em abcissas, usando aqui uma escala logarítmica, pudemos traçar a representação indicada na Fig. 2.

com o tempo era dada pela recta *c*) da Fig. 2, e que as linhas relativas a alongamentos de 0,1 (linha *d*), 0,2, 0,3 e 0,5 % eram sensìvelmente rectas paralelas à primeira, nas condições em que está traçado o gráfico da Fig. 2.

Baseando-nos nestes resultados traçámos as linhas a) e b), dando-nos a primeira as cargas que produzem um alongamento de 0,1 % por fluagem e a segunda as cargas de rotura.

Podemos tomar para cargas admissíveis as primeiras, dadas por a) (fig. 2), e assim verificamos que a carga admissível para um funcionamento contínuo durante 100.000 horas é de cerca de 1.500 kg/cm². Mesmo para uma vida de 3×10^5 horas, que é em geral a duma turbina de vapor, a carga admissível permanece à roda dos 1.000 kg/cm².

Esta conclusão é confirmada pelo que pode ler-se no artigo «The open cycle Gas Turbine», publicado em «The Metrovick Gazette», de Agosto de 1948:

«Os dados sobre experiências prolongadas com materiais resistentes a altas temperaturas são poucos, mas sabe-se que para uma vida de 10.000 horas e uma fadiga de 945 kg/cm², o «Nimonic 80» pode usar-se até 700° C. Para uma vida maior, como é o caso de uma central eléctrica com uma turbina de gás como base, não deve ultrapassar-se por agora os 600° — 650° C.».

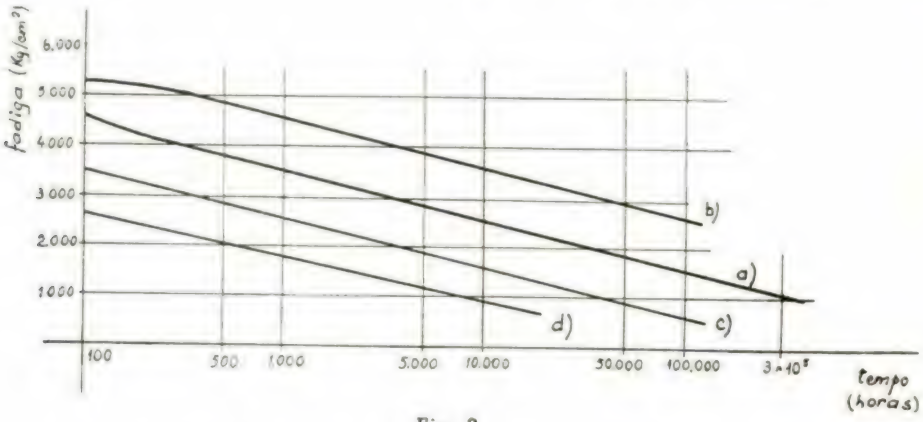


Fig. 2

Experiências feitas a 700° C, e com uma duração de 10.000 horas, mostraram que a variação da carga de rotura por fluagem

Repare-se que a linha d) da fig. 2, tirada de «Gas Turbines and Jet Propulsion», de Geoffrey Smith, nos fornece para uma vida

de 10.000 horas, a 700° C, precisamente uma fadiga um pouco inferior a 1.000 kg/cm², como se diz na transcrição feita.

Também Vincent, no seu livro «The Theory and Design of Gas Turbines and Jet Engines», afirma que as fadigas nas pás podem ir desde 1.000 a 2.000 kg/cm², referindo-se os valores mais baixos a máquinas de longa vida, trabalhando a baixas temperaturas e de modo contínuo.

A fig. 2 mostra bem que, para vidas mais curtas, como as dos motores de avião, se pode ir para maiores cargas admissíveis, mesmo com temperaturas de serviço mais elevadas. Segundo Godsey e Young, em turbinas para motores de reacção, as fadigas nas pás provenientes da força centrífuga e dos esforços de flexão podem ir desde 850 a 1.800 kg/cm² («Gas Turbines for Aircraft»). No «Derwent V», da casa «Rolls-Royce», para uma temperatura média das pás superior a 600° C, a fadiga de flexão devida ao impulso dos gases vai até 530 kg/cm² e a da força centrífuga sobe a 2.000 kg/cm², o que origina uma fadiga total à volta dos 2.500 kg/cm² («Gas Turbines and Jet Propulsion»).

Por sua vez, J. G. Keenan, em «Elementary Theory of Gas Turbines and Jet Propulsion», afirma que pode considerar-se normal uma fadiga entre 750 e 800 kg/cm² nas pás duma turbina de reacção sob a acção de gases a 600° C, em instalações fixas, de serviço permanente.

Indicamos a seguir outras propriedades mecânicas do «Nimonic 80», a 600° C, algumas das quais nos permitem apreciar melhor a influência preponderante que o fenómeno da fluagem tem na fixação das cargas admissíveis para materiais sujeitos a altas temperaturas:

Carga de tracção que produz um alongamento de 0,1 %	5.700 kg/cm²
Carga de rotura à tracção	7.600 kg/cm²
Módulo de elasticidade. .	$1{,}85.10^6$ kg/cm².

À temperatura que estamos a considerar, o «Nimonic 80» resiste a fadigas repetidas, de 0 a 3.000 kg/cm², que se produzem 40×10^6 vezes em 300 horas.

* * *

As pás construídas com o «Nimonic 80» são, em geral, obtidas a partir de barras ou peças toscamente forjadas, as quais são depois trabalhadas

A liga começa a fundir a 1.380° C e o trabalho de forja pode ser realizado convenientemente entre 1.050° e 1.150° C. A dureza do material aumenta muito abaixo dos 1.000° C, e isso obriga a frequentes reaquecimentos. Entre dois reaquecimentos consecutivos deve dar-se apenas uma, ou no máximo, duas pancadas. A atmosfera do forno deve ser oxidante e o combustível deve ter uma percentagem de enxofre muito pequena.

O «Nimonic 80» é prejudicado pelo trabalho a frio, pois este aumenta a velocidade de fluagem, em igualdade de condições, originando a rotura num espaço de tempo mais curto e com um maior alongamento.

As pás podem ainda ser fundidas pelo processo da «cera perdida» e trabalhadas depois, para melhor aperfeiçoamento. No entanto, é mais frequente fundirem-se as pás fixas.

* * *

Para terminarmos este rápido estudo de materiais utilizados no fabrico das pás móveis, vamo-nos referir a outras duas categorias que poderão tomar certo interesse no futuro.

Uma delas é constituída por alguns metais puros ou ligas com elevadas percentagens desses elementos. Esses metais são o molibdénio, o titânio, o tungsténio, o tântalo e o zircónio. Estes últimos são pouco abundantes na natureza, mas os dois primeiros são relativamente mais frequentes, estando já o molibdénio a ser fabricado em grandes quantidades, o que não acontece ainda com o titânio.

Estes metais têm pontos de fusão muito elevados — Mo (2.100° C), Ti (1.788° C), W (3.352° C), Ta (2.830° C) e Zi (1.885° C) — e por isso mantêm ume apreciável resis-

tência mecânica às temperaturas que se encontram numa turbina de gás. A resistência à fluagem do molibdénio a altas temperaturas promete muito; contudo, ele tem de ser protegido contra uma atmosfera oxidante acima dos 400° C, e este problema ainda não está resolvido. O titânio tem a vantagem dum baixo peso específico, mas o problema da oxidação é o mesmo.

A segunda categoria, formada por materiais cerâmicos, está ainda na infância e, pelo menos durante os anos mais próximos, o seu emprego apresenta-se bastante duvidoso.

Os materiais cerâmicos oferecem duas modalidades de emprego: como revestimento de metais ou ligas metálicas e em aglomerados.

A utilização como revestimento está relacionada intimamente com o emprego de metais puros. Com efeito, em igualdade de temperatura, os metais refractários a que fizemos referência acima têm uma resistência mecânica mais elevada que as ligas, a maior parte das quais funde entre 1.300° e 1.400° C. Infelizmente, como dissemos, a resistência daqueles metais à oxidação é muito deficiente e se quisermos melhorá-la pela adição de outros elementos, a sua resistência diminui e torna-se semelhante à das ligas. Daí o pensar-se em proteger aqueles metais por meio dum revestimento apropriado, mas surge a dificuldade de realizar uma aderência perfeita. Esta solução foi estudada pelos serviços do N. A. C. A. americano. Numerosos ensaios mostraram que o molibdénio era o mais adequado e o revestimento proposto foi o seguinte: uma camada vidrada de pequeno coeficiente de dilatação, com 20 % de óxido de zircónio; uma segunda camada com 95 % do mesmo óxido e, por fim, uma terceira com a mesma composição, em película delgada. Um outro processo consiste em fazer circular em torno da peça a proteger vapores de cloretos de metais refractários, os quais decompõem-se numa atmosfera de hidrocarbonetos e depositam carbonetos refractários (de titânio, de tântalo e de silício).

Tem ainda tentado empregar-se, para o fabrico das pás, os materiais cerâmicos em aglomerados metálicos.

b) *Anéis exteriores das pás móveis* — Vários motivos levam muitas casas construtoras a empregar um anel exterior nas pás móveis. De facto, as relativamente grandes folgas radiais que por enquanto é impossível evitar aconselham aquela solução. O anel exterior torna possível a substituição duma forma radial por uma folga axial, o que é uma vantagem aqui, visto podermos diminuir dessa maneira as perdas intersticiais internas.

Além disso, o anel dá à fiada de pás uma estrutura mais rígida, aumentando a sua resistência contra as vibrações pela elevação da sua frequência natural, e diminui um pouco as fadigas de flexão.

Os anéis podem ser completos ou formados por vários troços independentes. Esta segunda solução destina-se a atenuar os efeitos das dilatações. Os anéis são um pouco mais largos que as pás, para proteger aquelas contra possíveis choques axiais provocados por dilatações ou qualquer falta de alinhamento. Com o mesmo objectivo, adelgaçam-se os bordos dos anéis, para que sejam eles a sofrer o eventual desgaste em caso de encosto às peças fixas.

No entanto, o emprego dos anéis não tem só vantagens. Apresentam também alguns inconvenientes aerodinâmicos e térmicos. Mas podemos por enquanto afirmar que o maior perigo no seu emprego resulta de não serem ainda conhecidas com suficiente pormenor as modificações aerodinâmicas, térmicas e mecânicas que os anéis originam.

Tendo em atenção todos estes factos, utiliza-se no fabrico destes anéis aços especiais, resistentes a elevadas temperaturas, de que um exemplo é fornecido pelo «H. R. Crown Max», da «Firth-Vickers Stainless Steels, Ltd.ª», de Sheffield.

c) *Pás fixas* — Estas pás estão submetidas a temperaturas mais elevadas que as do rótor, mas em compensação são muito menos fatigadas. Estão sujeitas a pequenos esforços de flexão, em resultado da variação da quantidade de movimento que os gases sofrem ao atravessá-las. Por estes motivos, o fenómeno da fluagem não tem

aqui a enorme importância de que se reveste nas pás do rótor, embora constitua ainda um dos factores a atender.

O problema mais premente que aqui pode surgir, porém, é o das fadigas térmicas provenientes de aquecimentos e arrefecimentos rápidos. Mas numa máquina de funcionamento contínuo, mesmo sob aquele aspecto não há muito que temer, por não serem frequentes os arranques e paragens. Em motores de avião é que aquelas fadigas têm de ser consideradas, visto poderem dar origem a fendas nas pás.

Para a construção destas pás também podem ser utilizados os aços especiais com liga G.18B e G.32, quando as temperaturas não excederem 600° C. No entanto, o aço G.32 contém uma percentagem mais elevada de cobalto que o G.18B, o que lhe comunica maiores resistências mecânica e contra a oxidação em escamas. Por isso, pode suportar temperaturas mais elevadas em cerca de 100° C que o G.18B.

Para temperaturas mais elevadas, recorre-se a ligas metálicas, em especial ao «Nimonio 75», por causa da sua grande resistência à oxidação. Esta é adquirida devido à formação duma película de óxido inicial, que adere perfeitamente ao restante material não se separando sob a forma de escamas (efeito de «scaling»), e aquela película evita a oxidação continuada. Para a formação da película protectora têm muita importância o crómio e o alumínio, elementos que entram na composição da liga, que é do mesmo tipo que o «Nimonic 80», já estudado.

As principais propriedades físicas do «Nimonic 75» são as seguintes:

Peso específico . . . . 8,35 gr/cm³

Coeficiente de condutibilidade térmica:

a 100° C . . . 0,03 cal/cm. seg.° C

Coeficiente médio de dilatação linear:

20 — 100° C . . .	$12{,}2 \times 10^{-6}$ /° C
20 — 300° C . . .	13,4 × » »
20 — 500° C . . .	14,1 × » »
20 — 700° C . . .	15,4 × » »
20 — 900° C . . .	16,0 × » »

Calor específico médio:

20 — 100° C . . . 0,11 cal/gr.° C

Podemos constatar que os coeficientes médios de dilatação linear são muito semelhantes aos do aço macio, para o qual temos:

20 — 100° C . . .	$11{,}8 \times 10^{-6}$ /° C
20 — 300° C . . .	13,0 × » »
20 — 500° C . . .	14,2 × » »

Esta é mais uma vantagem do emprego do «Nimonic 75» para as pás fixas, quando estas estão alojadas em distribuidores de aço macio. A igualdade de dilatações evita o aparecimento de fadigas acessórias de origem térmica.

As pás fixas fabricadas com o «Nimonic 75» podem ser forjadas ou fundidas. Em regra são fundidas pelo método da «cera perdida».

É interessante notar a este respeito que os materiais fundidos parecem ter maior resistência a temperaturas elevadas, mas a sua estrutura é formada por grãos de grandes dimensões. Por seu lado, os materiais forjados têm uma estrutura fina, mas são um pouco menos resistentes às altas temperaturas.

d) *Rótor* — Em turbinas de potência relativamente pequena, podem fabricar-se os discos e o veio numa peça só, a que se dá o nome de rótor. Consegue-se assim uma maior resistência mecânica do conjunto, mas é evidente que a escolha do material continua a ficar condicionada pelas características de trabalho dos discos pròpriamente ditos.

As condições de trabalho dos discos são quase tão críticas como as das pás móveis. Por um lado, as temperaturas vão ser sensìvelmente mais baixas, o que atenua as dificuldades impostas pela fluagem, mas por outro lado as fadigas provenientos da força centrífuga e dum aquecimento desigual são muito maiores.

Também aqui, a elevada temperatura de trabalho veio introduzir uma transforma-

ção radical nos tipos de materiais a empregar. Pode dizer-se que o desenvolvimento das turbinas de gás para fins industriais, onde é indispensável uma longa vida, foi demorado durante muito tempo pela falta de materiais capazes de resistir a grandes fadigas a temperaturas que se aproximam do vermelho escuro (700° C).

Os novos aços especiais que foram desenvolvidos, principalmente durante a última guerra, podem dividir-se em dois grandes grupos: os aços de estrutura ferrítica ou perlítica, e os aços de estrutura austenítica.

Os primeiros só podem utilizar-se, em geral, para temperaturas inferiores a 550°-650° C, pois para temperaturas mais elevadas a resistência à fluagem diminui ràpidamente e, além disso, o aquecimento prolongado produz modificações estruturais, que baixam a resistência mecânica e à oxidação por escamas.

Para temperaturas mais elevadas é preciso recorrer aos aços austeníticos. Surge, porém, uma nova dificuldade pelo facto de estes últimos aços possuirem maiores coeficientes de dilatação, o que tem por efeito aumentar as fadigas térmicas.

Fizemos já referência à firma «William Jessop and Sons, Ltd.», de Sheffield, que tem desenvolvido aços dum e doutro tipo. Apresentamos a seguir algumas composições químicas típicas desses aços empregados para a construção de discos de turbinas:

Aço	C	Mn	Si	Ni	Cr	Mo	V	W	Co	Nb	Fe
H.40	0,23	0,3	0,45	0,3	2,7	0,5	0,75	0,5	–	–	94,27
R.20	0,15	0,8	0,3	14,0	19,0	–	–	–	–	1,7	64,05
G.18B	0,4	0,8	1,0	13,0	13,0	2,0	–	2,5	10,0	3,0	54,30

O primeiro é um aço ferrítico e os dois últimos são de estrutura austenítica. As temperaturas limites de resistência à fluagem são, respectivamente, 650°, 680° e 780° C; para resistência à oxidação por escamas, as temperaturas limites são, pela mesma ordem, 600°, 920° e 880° C.

Os aços austeníticos citados têm, pois, uma resistência à oxidação por escamas maior do que à fluagem, ao contrário do que sucede com o aço ferrítico H.40, cuja resistência à fluagem excede um pouco a resistência à oxidação.

O H.40 foi posteriormente melhorado, obtendo-se um outro aço ferrítico — o H.46 — de composição química semelhante e com a mesma resistência à fluagem que o H.40, mas possuindo uma maior resistência à oxidação por escamas, de modo a poder utilizar-se até temperaturas da ordem dos 650° C.

A propósito de aços empregados no fabrico das pás, falámos no G.32, que é um aço austenítico, melhor que o G.18B, e caracterizando-se sob o ponto de vista da composição química por conter uma maior percentagem de cobalto. A sua temperatura limite de resistência à fluagem sobe a 880° C e à oxidação vai até perto de 1.050° C.

As propriedades físicas mais importantes dos aços mencionados são as do mapa da página seguinte.

Este quadro põe em evidência o pequeno coeficiente de dilatação linear dos aços ferríticos quando comparado com o dos aços austeníticos.

Interessa, contudo, conhecer a resistência à fluagem destes aços, visto ser esta a propriedade mais importante que vai limitar a carga admissível.

O gráfico da fig. 3 indica as cargas necessárias para produzir um alongamento de fluagem de 1 % em 1.000 horas, a diferentes temperaturas.

Para nos orientarmos na escolha do material com que deve ser fabricado o rótor, temos de conhecer aproximadamente as temperaturas a que ele vai estar submetido.

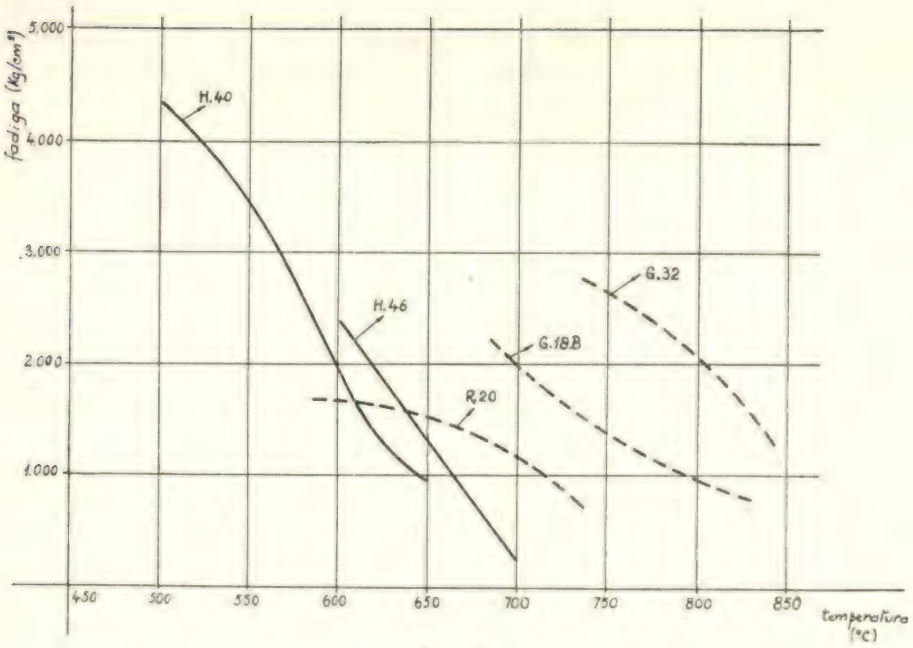


Fig. 3

Aço	H. 40	H. 46	R. 20	G.18B	G.32
Peso específico (gr/cm)³	7,84	7,75	7,95	8,13	8,26
Coeficiente de condutibilidade térmica (cal/cm.seg.°C):					
a 100° C	0,077		0,036	0,032	0,035
» 300° C	0,081		0,044	0,041	0,043
» 500° C	0,077		0,052	0,049	0,051
» 700° C	0,069		0,064	0,057	0,058
Coeficiente médio de dilatação linear (x 10−6/° C):					
20 — 100° C	12,4	9,3	17,0	15,6	14,8
20 — 200° C	12,4	10,9	17,2	15,8	15,0
20 — 300° C	12,5	11,3	17,4	16,5	15,1
20 — 400° C	12,9	11,5	17,6	16,9	15,2
20 — 500° C	13,2	12,0	17,9	17,1	15,3
20 — 600° C	13,6	12,1	18,6	17,3	15,9
20 — 700° C	13,9	12,1	18,8	17,7	16,4
Módulo de elasticidade (x 10⁶ kg/cm²):					
a 20° C	2,11	2,13	1,97	2,16	2,32
» 400° C	1,86	1,86	1,60	1,84	2,10
» 500° C	1,65	1,65	1,48	1,76	2,00
» 600° C	1,37	1,34	1,34	1,65	1,89
» 700° C		0,95	1,20	1,56	1,80

Para temperaturas muito elevadas temos de recorrer a aços austeníticos. Mas se a temperatura máxima não exceder os 500° C, é aconselhável a escolha dum aço ferrítico, que dá origem a menores fadigas térmicas e apresenta uma resistência mecânica mais elevada.

Dos dois aços ferríticos considerados — o H . 40 e o H . 46 — o segundo possui uma maior resistência à oxidação por escamas e um coeficiente de dilatação linear mais baixo, em igualdade de resistência à fluagem.

A Fig. 3 mostra-nos que a resistência à fluagem do H . 40 — e portanto a do H . 46 que é muito aproximada — para temperaturas inferiores a 500° C, é relativamente elevada.

Posto isto, apontamos a seguir as propriedades mecânicas fundamentais, às temperaturas vulgares, dos aços que temos estado a estudar:

Aço	Tratamento	C_t (kg/cm²)	R_t (kg/cm²)
H.40	endurecido e temperado	7.900	9.450
H.46	» » »	7.250	9.450
R.20	arrefecido ao ar . . .	2.350	6.300
G.18B	tratado em solução . .	2.200	7.250
G.18B	trabalhado a quente . .	3.950	7.550
G.32	tratado em solução .	6.000	10.000

Neste quadro, C_t representa a carga de tracção que produz um alongamento de 0,1 %, e R_t a carga de rotura à tracção.

As cargas de tracção que produzem um alongamento de 0,1 % podem ser tomadas como cargas admissíveis na região central dos discos, que é a menos aquecida. O quadro mostra então a superioridade, em geral, dos aços ferríticos às temperaturas normais. Dos aços austeníticos, apenas o G.32 se aproxima bastante dos ferríticos.

A Fig. 3 e o quadro acima provam que fadigas inferiores a 1.500 kg/cm² são de aceitar para o aço H.46 e para uma máquina de longa vida.

Geoffrey Smith, no seu livro «Gas Turbines and Jet Propulsion», indica que nos motores «Derwent», da casa inglesa «Rolls-Royce», a fadiga radial no centro do disco é de 1.580 kg/cm² e é máxima perto da coroa, com o valor de 2.440 kg/cm². A compressão tangencial na periferia sobe a 2.180 kg/cm². A temperatura dos gases ao incidirem sobre as pás móveis anda perto dos 750° C.

Estas fadigas, bastante elevadas, justificam-se por se tratar de motores de vida curta.

Os discos das turbinas daqueles motores são fabricados com o aço austenítico G.18B, por causa da elevada temperatura de serviço, e isso põe bem em evidência até que ponto o material é esforçado, pois as fadigas indicadas quase se aproximam das cargas admissíveis para o G.18B às baixas temperaturas.

* * *

O rótor duma turbina de gás é uma peça forjada. Por esse motivo, muitos problemas tiveram que ser resolvidos antes que os novos aços se pudessem empregar para fins industriais. Compreende-se que um aço com grande resistência a temperaturas elevadas se mostre, por esse próprio facto, muito difícil ao trabalho de forja ou a qualquer outra deformação a quente.

Os discos do rótor precisam também de uma certa ductilidade na coroa, por causa da fixação das pás.

Os grandes rótores para turbinas de gás industriais são, em geral, forjados em partes separadas umas das outras, e depois de trabalhadas e experimentadas individualmente é que são soldadas para formarem um todo único. Esta questão da soldadura foi outro dos numerosos problemas solucionados.

É preciso ainda precaver-nos contra possíveis defeitos internos. Para os descobrir são empregados métodos especiais, tais como o emprego de raios X, raios gama produzidos por uma bomba de rádio, e um método electrónico, associado a ondas supersónicas, desenvolvido em Inglaterra pela firma «H. Hughes and Sons. Ltd.».

«TÉCNICA»

«A posição que a *Técnica* hoje ocupa conquistou-a, não por favor da sorte, mas pelo esforço próprio, e assim é de esperar que a sustente com o mesmo brilho durante largo período.»

Estas palavras, escritas pelo Sr. Prof. Eng.º Belard da Fonseca no número comemorativo das Bodas de Prata da *Técnica*, vieram reforçar a responsabilidade que a Revista já tinha perante si própria de continuar procurando atingir um plano cada vez mais elevado.

Para tanto a Direcção vem mais uma vez pedir aos Técnicos Portugueses a sua colaboração, que se poderá traduzir na publicação regular nas páginas da *Técnica* de estudos de carácter técnico, económico, social e pedagógico que possam interessar à formação dos estudantes de Engenharia e a que o Autor reconheça mérito justificativo, integrando-se na índole da Revista.

A Direcção da *Técnica*

C. D. 624.041.2

CÁLCULO DE ESTRUTURAS HIPERESTATICAS

PELO ENG.º CIVIL (I. S. T.) J. S. BRAZÃO FARINHA

Como é sabido, o método de Cross, que é o processo mais prático e utilizado no cálculo de estruturas hiperestáticas, comporta as três seguintes operações:

1.º — Cálculo dos momentos aplicados junto dos extremos dos diversos elementos, supostos estes como perfeitamente encastrados nas suas extremidades.

2.º — Distribuição desses momentos proporcionalmente aos coeficientes de rigidez dos elementos que concorrem nos diversos nós, sucessivamente considerados.

3.º — Transmissão dos momentos de uma extremidade à outra dos diversos elementos, em virtude da deformação recíproca das suas extremidades.

Torna-se, pois, necessário abordar, como questões prévias, a determinação dos momentos de encastramento perfeito, das rigidez e dos coeficientes de transmissão dos elementos, nas várias hipóteses. Essa determinação pode fazer-se com facilidade a partir do teorema de Castigliano.

No que se segue abordaremos o caso de elementos de eixo rectilíneo ou curvo, de momento de inércia constante ou variável, não sujeitos a esforços de torção.

1 — Teorema de Castigliano (1)

Consideremos um sólido impossibilitado de movimento de conjunto, ao qual estão aplicadas forças $F_1, F_2 \ldots . F_n$ sob cuja acção o sólido se deforma.

O teorema de Castigliano exprime que o deslocamento δ_i do ponto de aplicação da força F_i, na direcção desta, e por virtude da deformação do sólido, é igual à derivada, em ordem a F_i, do trabalho interno da deformação. Este enunciado subsiste quando F_i e δ_i designam a grandeza de um binário e o deslocamento angular correspondente.

A energia de deformação elástica de uma peça linear não sujeita a esforços de torção é dada pela expressão

$$\tau = \int_0^l \frac{M^2\, ds}{2\, E\, I} + \int_0^l \frac{N^2\, ds}{2\, E} + \alpha \int_0^l \frac{T^2\, ds}{2\, C}$$

sendo M, N e T o momento flector, esforço normal, e esforço transverso, funções de s (comprimento de arco, medido sobre o eixo do elemento linear) e das forças aplicadas à peça. Na quase totalidade das aplicações é desprezável a energia devida ao esforço transverso sendo-o também em muitos casos a energia devida ao esforço normal. Isto é, basta geralmente considerar na expressão de τ o termo onde entra M

$$\tau = \int_0^l \frac{M^2\, ds}{2\, E\, I}$$

(1) Manuel Rocha — Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Begs — «Técnica» n.º 139, Junho 1943, pág. 379.

As derivadas de τ em ordem às incógnitas hiperestáticas são obtidas pela regra de derivação dos integrais paramétricos [1].

2 — Convenções de sinais

Consideremos uma viga actuada por cargas descendentes, observada em sentido contrário ao das cargas. As convenções que habitualmente se adoptam em Resistência de Materiais podem definir-se como segue:

a) *Momentos flectores*

Consideremos uma secção S da viga e os momentos flectores M das forças à esquerda e das forças à direita dessa secção, os quais são de sinais contrários, porque nos dois troços da viga actuam forças que se equilibram. No caso da fig. 1-a os momentos são positivos, e as tracções dão-se na face inferior da viga.

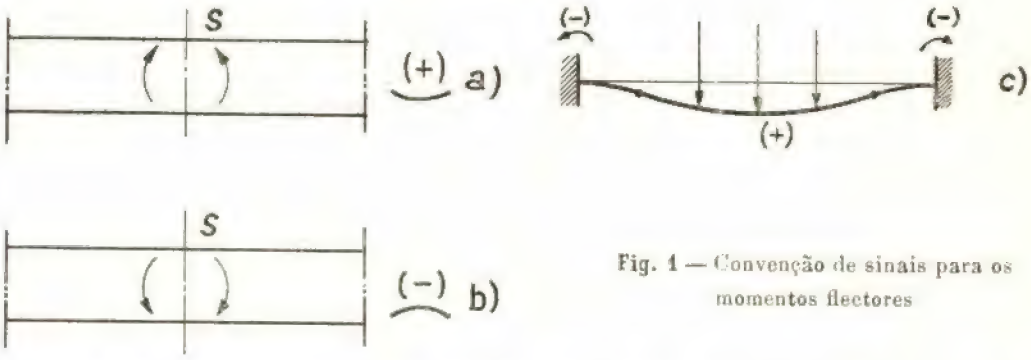


Fig. 1 — Convenção de sinais para os momentos flectores

No caso da fig. 1-b os momentos são negativos (tracções na parte superior). Podemos ainda dizer que o sinal é positivo quando, considerando-se o momento das forças à esquerda da secção, o sentido da rotação é o do movimento dos ponteiros de um relógio. Para as forças à direita da secção toma-se a convenção contrária.

---

[1] Do curso de Cálculo — A função $\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$ diz-se um integral paramétrico por existir um parâmetro y que entra na função a integrar e em geral nos limites. É portanto uma função de y cuja derivada é dada pela expressão

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{df}{dy}\, dx + f(b, y)\frac{db}{dy} - f(a, y)\frac{da}{dy}$$

Se os limites do integral forem independentes do parâmetro as derivadas de a e b em relação a y são nulas e a derivada do integral é o integral da derivada

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_a^b \frac{df}{dy}\, dx$$

Neste caso, se existirem parâmetros y, ω, z . . . . . teremos as derivadas parciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial \omega} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \omega}\, dx \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}\, dx \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Na fig. 1-c indica-se a deformação de uma viga com encastramentos nos apoios, correspondendo a parte média à zona de momentos positivos e as partes extremas às zonas de momentos negativos. A deformada da viga apresenta dois pontos de inflexão correspondentes às secções de momentos nulos.

b) *Esforços transversos.*

Pelo que diz respeito aos esforços transversos, quando consideramos as resultantes das componentes verticais das forças à esquerda ou à direita da secção S podemos obter um dos casos indicados na fig. 2. Em 2-a o esforço transverso é positivo quando a resultante das forças à esquerda da secção toma o sentido da vertical ascendente e negativo no caso contrário, 2-b. Toma-se a convenção inversa para as cargas à direita da secção. Daqui resulta que em uma viga carregada, simplesmente apoiada, são positivos os esforços transversos desde o apoio esquerdo até uma certa distância do meio da viga, variável com o tipo de cargas actuantes. À direita os esforços transversos são negativos.

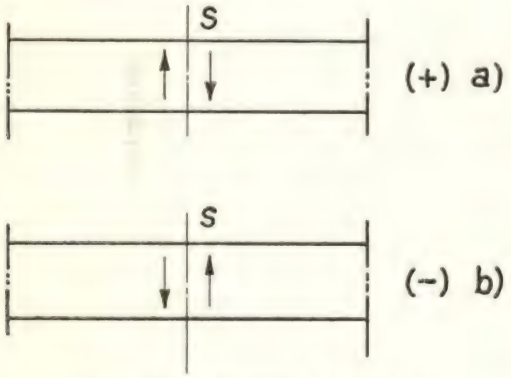


Fig. 2 — Convenção de sinais para os esforços transversos

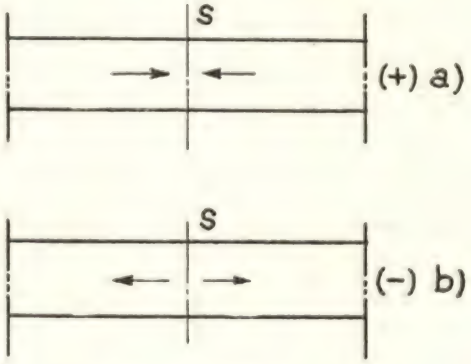


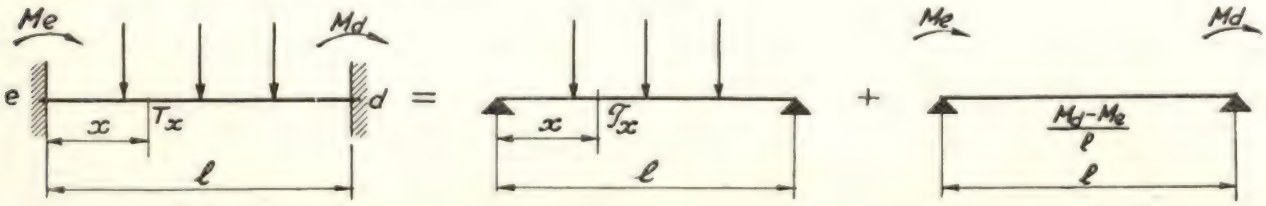
Fig. 4 — Convenção de sinais para os esforços normais

No caso de vigas apoiadas, sem cargas, e actuadas por momentos numa das extremidades, o sinal do esforço transverso é constante ao longo da viga, formando as reacções dos apoios um binário que equilibra o momento exterior M, isto é, $M = T.l$.

No caso de actuarem momentos M_e e M_d em cada um dos apoios, predominam as reacções que correspondem ao momento de maior valor absoluto, e portanto os esforços transversos correspondentes. Estas relações são importantes para a determinação dos esforços transversos em elementos hiperestáticos, que são deduzidos pela sobreposição das hipóteses correspondentes à viga simplesmente apoiada com cargas e sem cargas, neste caso apenas com momentos aplicados nos seus extremos.

É então aplicável, em todos os casos, a expressão $T = \frac{M_d - M_e}{l}$ em que M_d e M_e entram com os respectivos sinais [1].

[1] Nestas condições, para uma viga carregada de qualquer maneira com momentos quaisquer nos apoios, poderemos representar gràficamente a equação



Na fig. 3 indicam-se alguns diagramas de variação do esforço transverso.

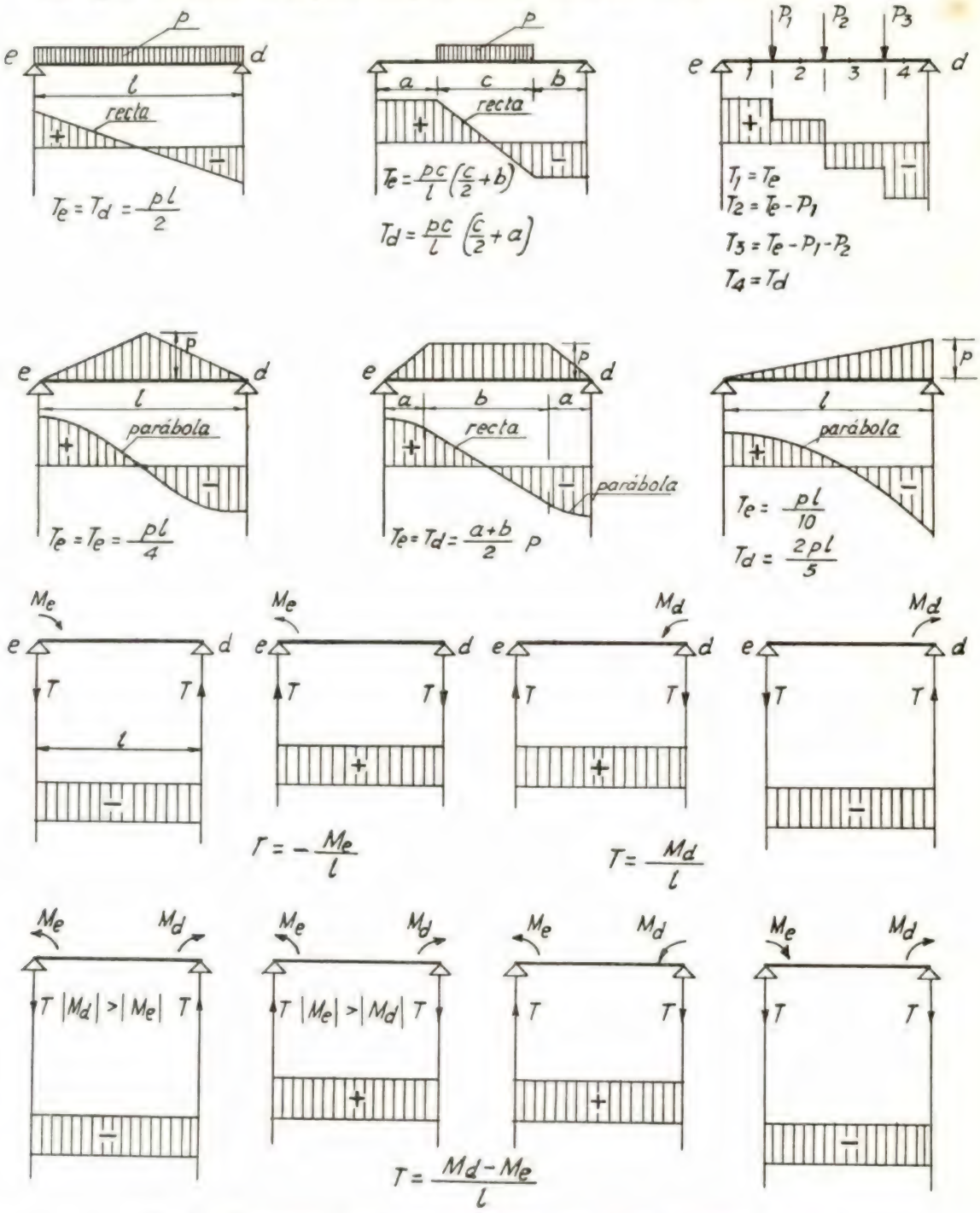


Fig. 3 — Diagramas de esforços transversos para várias hipóteses de carga

Será portanto

$$T_x = \tau_x + \frac{M_d - M_e}{l}$$

representado por τ_x o esforço transverso na secção correspondente da viga isostática (simplesmente apoiada) carregada da mesma maneira.

Integrando a equação acabada de escrever, resulta — visto a constante de integração ser M_e (para $x = 0$ é $M_x = M_e$),

$$M_x = \mathfrak{M}_x + M_e + \frac{M_d - M_e}{l}\,x$$

sendo M_x o momento flector na secção correspondente da viga isostática com iguais cargas.

c) *Esforços normais*

Os esforços normais consideram-se positivos quando dão compressões na secção e negativos quando dão tracções, como está representado na fig. 4. No primeiro caso o sentido das forças aproxima-se da secção, e no segundo afasta-se.

Todas as convenções de sinal acabadas de indicar são aplicáveis ao caso dos arcos.

d) *Assentamentos de apoio*

Considera-se positivo o assentamento Δ de apoio que faz rodar a viga no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio e negativo no caso contrário (ver fig. 6 e 9).

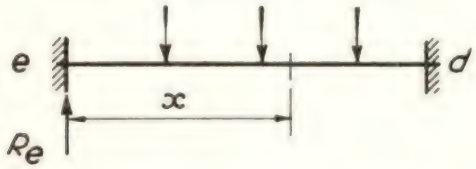


Fig. 5 — Viga encastrada nos apoios, sujeita a cargas verticais quaisquer

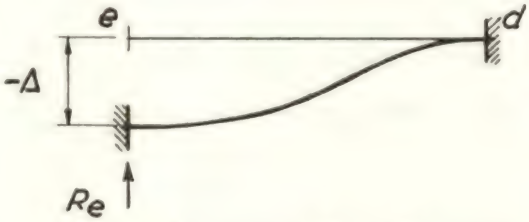


Fig. 6 — Assentamento de um dos apoios de uma viga encastrada

3 — Determinação dos momentos de encastramento perfeito de vigas sujeitas a cargas verticais

Por ser N nulo neste caso é apenas

$$\tau = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}\, ds$$

a) Consideremos uma viga perfeitamente encastrada nos apoios e sujeita a cargas quaisquer (fig. 5).

Tomando para incógnitas hiperestáticas o momento M_e e a reacção R_e do apoio esquerdo, resulta, por ser nula a rotação do apoio, e no caso de não se darem assentamentos deste,

$$\int_0^l \frac{2\,M}{2EI}\,\frac{\partial M}{\partial M_e}\, ds = 0 \qquad \int_0^l \frac{2M}{2EI}\,\frac{\partial M}{\partial R_e}\, ds = 0$$

sendo neste caso $ds = dx$. Mas

$$M = M_e + R_e x - \mathfrak{M}$$

em que $\mathfrak{M}$ é o momento das forças exteriores existentes à esquerda da secção de abcissa **x**, em relação a esta secção. Resulta

$$\frac{\partial M}{\partial M_e} = 1 \qquad \frac{\partial M}{\partial R_e} = x$$

e substituindo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^l \frac{M}{EI}\, dx = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^l \frac{M}{EI}\, x\, dx = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle M_e \int_0^l \frac{1}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x}{I}\, dx = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{I}\, dx \\[2ex] \displaystyle M_e \int_0^l \frac{x}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x^2}{I}\, dx = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{I}\, x\, dx \end{array} \right\} \quad (1)$$

b) Consideremos agora uma viga sem cargas exteriores, encastrada nos dois apoios, um dos quais sofre um assentamento $-\Delta$, fig. 6. Será

$$\frac{\partial \tau}{\partial M_e} = 0 \qquad \frac{\partial \tau}{\partial R_e} = -\Delta$$

donde, substituindo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^l \frac{M}{EI}\, dx = 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^l \frac{M}{EI}\, x\, dx = -\Delta \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle M_e \int_0^l \frac{1}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x}{I}\, dx = 0 \\ \\ \displaystyle M_e \int_0^l \frac{x}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x^2}{I}\, dx = -\Delta\, E \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Os sistemas (1) e (2) resolvem o problema, num e noutro caso.

A — **Vigas de momento de inércia constante**

Encontram-se com facilidade tabelas com a resolução deste problema para os tipos de cargas mais correntes na prática (vêr quadro I). A título de exemplo estudaremos apenas o caso de actuação de uma carga P concentrada numa secção qualquer da viga e o caso desta sofrer um deslocamento Δ na direcção perpendicular à sua direcção, na hipótese da viga descarregada.

c) Carga concentrada numa secção qualquer da viga (fig. 7).

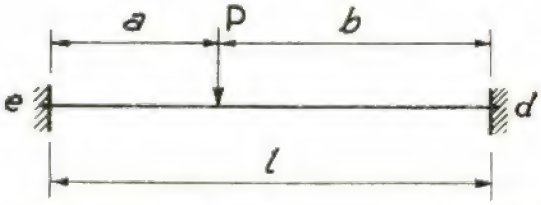


Fig. 7 — Viga encastrada, sujeita a uma carga concentrada P

De $x = 0$ até $x = a$ a expressão do momento é

$$M = M_e + R_e\, x$$

e de $x = a$ até $x = l$ é

$$M = M_e + R_e\, x - P\,(x - a)$$

Teremos portanto, substituindo o valor de M no sistema de equações (1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\frac{M_e}{I} \int_0^l dx + \frac{R_e}{I} \int_0^l x\, dx = \frac{1}{I} \int_a^l P\,(x - a)\, dx \\ \\ \displaystyle\frac{M_e}{I} \int_0^l x\, dx + \frac{R_e}{I} \int_0^l x^2\, dx = \frac{1}{I} \int_a^l P\,(x - a)\, x\, dx = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{donde} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle M_e\, l + R_e \frac{l^2}{2} = P\, \frac{(l^2 - a^2)}{2} - Pa\,(l - a) \\ \\ \displaystyle M_e \frac{l^2}{2} + R_e \frac{l^3}{3} = P\, \frac{(l^3 - a^3)}{3} - Pa\, \frac{(l^2 - a^2)}{2} \end{array} \right.$$

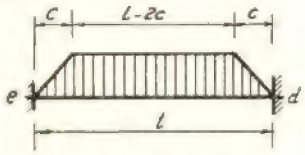
donde se tira $M_e = -\dfrac{P a b^2}{l^2}$ $\qquad R_e = \dfrac{P b^2 (l + 2a)}{l^3}$

Substituindo o valor de R_e na expressão de M válida no intervalo (a, l) resulta, fazendo $x = l$,

$$M_d = -\frac{P a^2 b}{l^2}$$

QUADRO I

Momentos de encastramento perfeito para vigas de momento de inércia constante



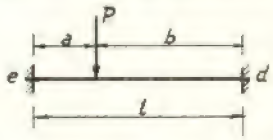
$M_e = M_d = -k \dfrac{p}{12l} = -\alpha\, p l^2$

$k = (l^3 + c^3 - 2lc^2)$ $\qquad \alpha = \dfrac{k}{12 l^3}$

carga unif.te distr.a $\quad c = 0$; $k = l^3$

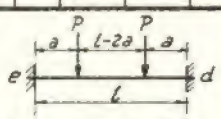
carga triangular $\quad c = 0{,}5l$; $k = \dfrac{5}{8} l^3$

c/l	α	c/l	α	c/l	α
0,00	0,0833	0,17	0,0789	0,34	0,0674
0,01	0,0833	0,18	0,0784	0,35	0,0665
0,02	0,0833	0,19	0,0779	0,36	0,0656
0,03	0,0832	0,20	0,0773	0,37	0,0647
0,04	0,0831	0,21	0,0767	0,38	0,0638
0,05	0,0829	0,22	0,0761	0,39	0,0629
0,06	0,0827	0,23	0,0755	0,40	0,0620
0,07	0,0825	0,24	0,0749	0,41	0,0611
0,08	0,0823	0,25	0,0742	0,42	0,0601
0,09	0,0820	0,26	0,0735	0,43	0,0591
0,10	0,0817	0,27	0,0728	0,44	0,0581
0,11	0,0814	0,28	0,0721	0,45	0,0571
0,12	0,0811	0,29	0,0714	0,46	0,0561
0,13	0,0807	0,30	0,0706	0,47	0,0551
0,14	0,0803	0,31	0,0698	0,48	0,0541
0,15	0,0799	0,32	0,0690	0,49	0,0531
0,16	0,0794	0,33	0,0682	0,50	0,0521

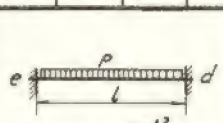


$$\begin{cases} M_e = -P \dfrac{a b^2}{l^2} = -\beta P l \\ M_d = -P \dfrac{a^2 b}{l^2} = -\gamma P l \end{cases}$$

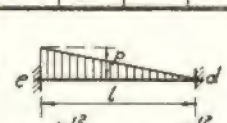
VALORES DE											
a	0,0l	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l	1,0l
β	0,000	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009	0,000
γ	0,000	0,009	0,032	0,063	0,096	0,125	0,144	0,147	0,128	0,081	0,000



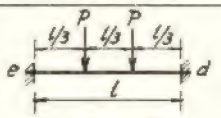
$M_e = M_d = -Pa\left(1 - \dfrac{a}{l}\right)$



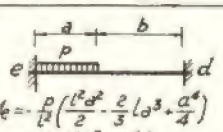
$M_e = M_d = -\dfrac{p l^2}{12}$



$M_e = -\dfrac{p l^2}{20}$ $\qquad M_d = -\dfrac{p l^2}{30}$

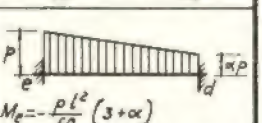


$M_e = M_d = -0{,}222\, Pl$



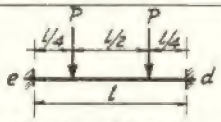
$M_e = -\dfrac{p}{l^2}\left(\dfrac{l^2 a^2}{2} - \dfrac{2}{3} l a^3 + \dfrac{a^4}{4}\right)$

$M_d = -\dfrac{p}{l^2}\left(\dfrac{l a^3}{3} - \dfrac{a^4}{4}\right)$

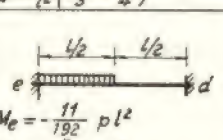


$M_e = -\dfrac{p l^2}{60}(3 + \alpha)$

$M_d = -\dfrac{p l^2}{60}(2 + 3\alpha)$

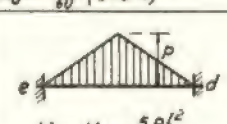


$M_e = M_d = -0{,}188\, Pl$

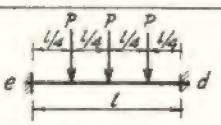


$M_e = -\dfrac{11}{192}\, p l^2$

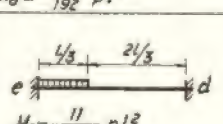
$M_d = -\dfrac{5}{192}\, p l^2$



$M_e = M_d = -\dfrac{5 p l^2}{96}$



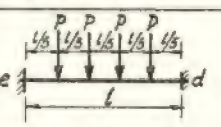
$M_e = M_d = -0{,}313\, Pl$



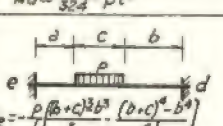
$M_e = -\dfrac{11}{324}\, p l^2$

$M_d = -\dfrac{3}{324}\, p l^2$

$M_e = M_d = -\dfrac{17}{384}\, p l^2$



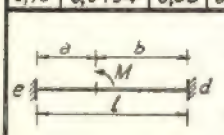
$M_e = M_d = -0{,}400\, Pl$



$M_e = -\dfrac{p}{l}\left(\dfrac{(b+c)^3 b^3}{3} - \dfrac{(b+c)^4 - b^4}{4l}\right)$

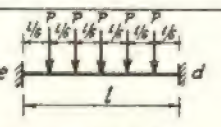
$M_d = -\dfrac{p}{l}\left(\dfrac{(a+c)^3 a^3}{3} - \dfrac{(a+c)^4 - a^4}{4l}\right)$

$M_e = M_d = -\dfrac{p l^2}{15}$

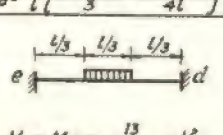


$M_e = -\left(4 \dfrac{a}{l} - 3 \dfrac{a^2}{l^2} - 1\right) M$

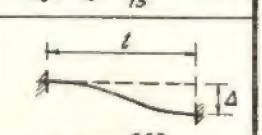
$M_d = +\left(4 \dfrac{b}{l} - 3 \dfrac{b^2}{l^2} - 1\right) M$



$M_e = M_d = -0{,}486\, Pl$



$M_e = M_d = -\dfrac{13}{324}\, p l^2$



$M_e = -M_d = -\dfrac{6EI}{l^2} \cdot \Delta$

d) Assentamento $-\Delta$ de um dos apoios (fig. 6).

Teremos agora, utilizando o sistema de equações (2) e atendendo a que, por não actuarem cargas sobre a viga é apenas $M = M_e + R_e\, x$,

$$\begin{cases} \dfrac{M_e}{I}\displaystyle\int_0^l dx + \dfrac{R_e}{I}\int_0^l x\, dx = 0 \\[2ex] \dfrac{M_e}{I}\displaystyle\int_0^l x\, dx + \dfrac{R_e}{I}\int_0^l x^2\, dx = -\Delta E \end{cases}$$

$$\text{donde} \begin{cases} M_e\, l + R_e \dfrac{l^2}{2} = 0 \\[2ex] M_e \dfrac{l^2}{2} + R_e \dfrac{l^3}{3} = -\Delta E I \end{cases} \qquad \begin{cases} M_e = \dfrac{6\, E I}{l^2}\Delta \\[2ex] R_e = -\dfrac{12\, E I}{l^3}\Delta \end{cases}$$

Substituindo R_e na expressão de M e fazendo $x = l$ vem

$$M_d = -\frac{6\, E\, I}{l^2}\Delta$$

Portanto M_e e M_d são iguais em valor absoluto dependendo os seus sinais do sentido do deslocamento Δ.

B — **Vigas de momento de inércia variável**

No caso de ser variável o momento de inércia da viga, não é em geral possível calcular os integrais directamente, havendo que os transformar em somatórios. Operando pela regra dos trapézios ou pela fórmula de Simpson, e dividindo o vão da viga em 2n partes iguais, de comprimento d, obtém-se respectivamente [1].

$$\int_a^b y\, dx = d\left[\frac{y_0 + y_{2n}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{2n-1}\right]$$

$$\int_a^b y\, dx = \frac{d}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots\ldots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots\ldots + y_{2n-2})\right]$$

---

[1] Existem outras maneiras de efectuar esta operação. Cf. B. Robinson e J. Courbon «Cálculo de integrais com a máquina de calcular vulgar» — Técnica n.º 224, Julho 1952, pág. 597.

Há que referir que a aplicação do método dos trapézios não exige que o número de intervalos seja par, como acontece com a regra de Simpson. Querendo aplicar este último processo de integração a um intervalo dividido num número impar de partes, $2n + 1$ (como mostra a figura junta), há que isolar a primeira área parcial tracejada na figura, a qual é limitada à esquerda pela ordenada inicial y_a. À parte restante será aplicável a expressão indicada.

Se considerarmos substituída a curva nos pontos (a, y_a), (x_0, y_0), (x_1, y_1) por uma parábola do 2.º grau, conclui-se que o valor daquela área parcial será

$$\frac{d}{3}\left(\frac{5}{4}y_a + 2\,y_0 - \frac{1}{4}y_1\right)$$

e portanto, substituindo,

$$\int_a^b y\, dx = \frac{d}{3}\left[\frac{5}{4}y_a + 3\,y_0 + y_{2n} + \frac{15}{4}y_1 + 4\,(y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right]$$

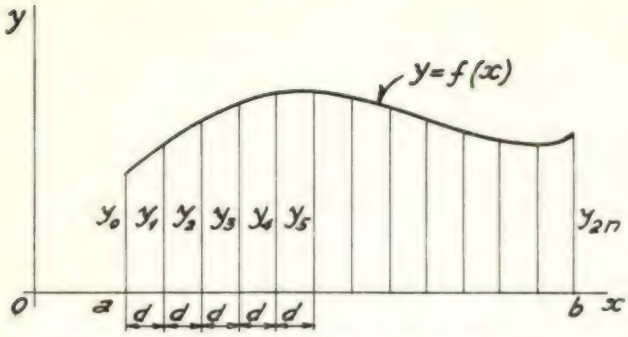


Fig. 7 — Cálculo do integral definido por transformação em somatório

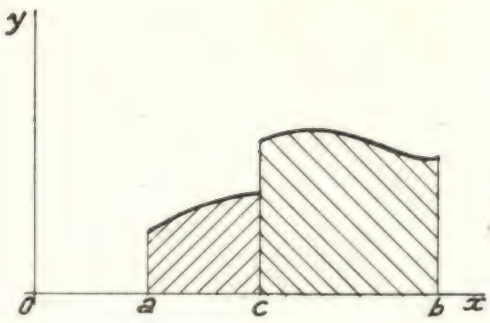


Fig. 8 — Cálculo do integral de uma função descontínua num ponto

É de notar que estas expressões só são verdadeiras no caso de haver continuidade na variação da função a integrar. Quando as secções a estudar tenham discontinuidades nas suas dimensões de que resultem curvas como a indicada na fig. 8, há que calcular separadamente as duas áreas e somar

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^c y dx + \int_c^b y\,dx$$

Exemplo — Calcular os momentos de encastramento perfeito da viga indicada na figura 9, de largura b_0 constante, actuando sucessivamente cada uma das hipóteses de carga referidas, e para assentamentos Δ do apoio e e do apoio d.

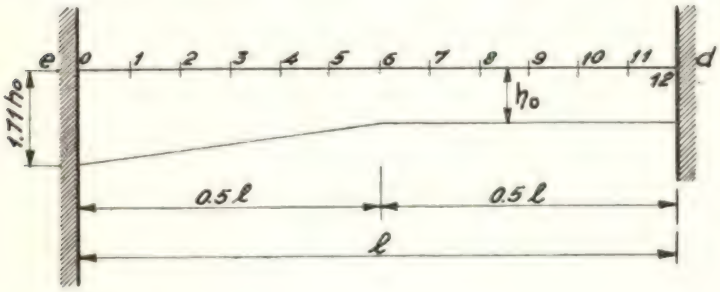
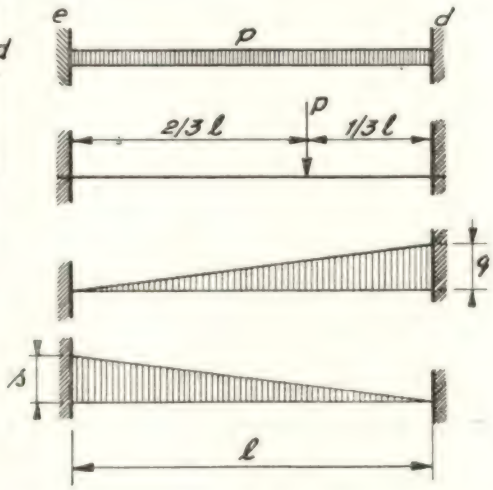
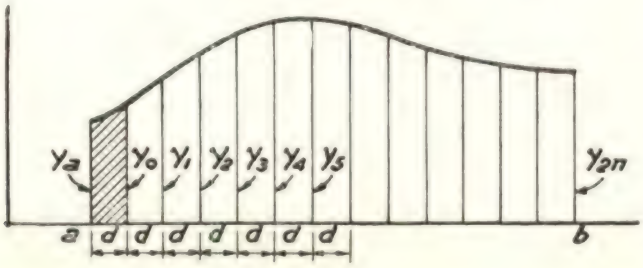


Fig. 9 — Viga de momento de inércia variável



Esta expressão é quase tão cómoda de aplicar como as anteriores.
(Cf. Fang-Yin Tsai, — «Proceedings American Society of Civil Engineers», Setembro 1948, pág. 1 143).



Tomando para referência o momento de inércia I_o da parte da viga de altura constante h_o, teremos

$$I_o = \frac{b_o\, h_o^3}{12} \qquad I = I_o\, \alpha^3 \quad \text{sendo} \quad \alpha = \frac{h}{h_o}$$

Se tomarmos para origem a secção e, podemos organizar o quadro II, que nos permite calcular os valores dos integrais que entram nas expressões que nos dão os valores de M_e e M_d. No quadro III indicam-se os valores correspondentes quando se tomam para origem a secção d, de menor altura.

QUADRO II

Secções	Abcissas x	Alturas da viga $\alpha = \frac{h}{h_o}$	Momentos de inércia $I = I_o\, \alpha^3$	Quocientes				
				$\frac{l}{I}$	$\frac{x}{I}$	$\frac{x^2}{I}$	$\frac{x^3}{I}$	$\frac{x^4}{I}$
0	0,0000 l	1,7100	5,000 I_o	0,200 $\frac{l}{I_o}$	0,000 $\frac{l}{I_o}$	0,000 $\frac{l^2}{I_o}$	0,000 $\frac{l^3}{I_o}$	0,000 $\frac{l^4}{I_o}$
1	0,0833	1,5917	4,033	0,248	0,021	0,002	0,000	0,000
2	0,1667	1,4733	3,198	0,313	0,052	0,009	0,001	0,000
3	0,2500	1,3550	2,488	0,402	0,101	0,025	0,006	0,002
4	0,3333	1,2367	1,892	0,529	0,176	0,059	0,020	0,007
5	0,4167	1,1183	1,399	0,715	0,298	0,124	0,052	0,022
6	0,5000	1,0000	1,000	1,000	0,500	0,250	0,125	0,063
7	0,5833	1,0000	1,000	1,000	0,583	0,340	0,199	0,116
8	0,6667	1,0000	1,000	1,000	0,667	0,445	0,296	0,198
9	0,7500	1,0000	1,000	1,000	0,750	0,563	0,422	0,316
10	0,8333	1,0000	1,000	1,000	0,833	0,694	0,578	0,482
11	0,9167	1,0000	1,000	1,000	0,917	0,840	0,770	0,706
12	1,0000	1,0000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Teremos, pela regra de Simpson

$$\int_0^l \frac{1}{I}\, dx = \frac{0{,}0833}{3}\, [0{,}200 + 1{,}000 + 4 \times (0{,}248 + 0{,}402 + 0{,}715 + 1{,}000 + 1{,}000 + 1{,}000) + 2 \times$$
$$\times (0{,}313 + 0{,}529 + 1{,}000 + 1{,}000 + 1{,}000)] = 0{,}7318\, \frac{l}{I_o}$$

e de maneira análoga acha-se

$$\int_{2/3\, l}^{l} \frac{1}{I}\, dx = 0{,}3333\, \frac{l}{I_o}\, ; \quad \int_0^l \frac{x}{I}\, dx = 0{,}4482\, \frac{l^2}{I_o}\, ; \quad \int_{2/3\, l}^{l} \frac{x}{I}\, dx = 0{,}2778\, \frac{l^2}{I_o}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{I}\,dx = 0{,}3192\,\frac{l^3}{I_0}\;;\quad \int_{2/3\,l}^{l} \frac{x^2}{I}\,dx = 0{,}2346\,\frac{l^3}{I_0}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{I}\,dx = 0{,}2454\,\frac{l^4}{I_0}\;;\quad \int_0^1 \frac{x^4}{I}\,dx = 0{,}1986$$

Pela regra dos trapézios teríamos, para valor do primeiro integral

$$\int_0^1 \frac{1}{I}\,dx = 0{,}0823\left(\frac{0{,}200+1{,}000}{2} + 0{,}248 + 0{,}313 + 0{,}402 + 0{,}529 + 0{,}715 + 1{,}000 + 1{,}000 + \right.$$
$$\left. + 1{,}000 + 1{,}000 + 1{,}000 + 1{,}000\right) = 0{,}7339\,\frac{l}{I_0}$$

e assim sucessivamente, obtendo-se valores que pouco diferem dos anteriores.

Para a origem em d teremos o quadro III

QUADRO III

Secções	Abcissas x	Alturas da viga $\alpha = \frac{h}{h_0}$	Momentos de inércia $I = I_0\,\alpha^3$	Quocientes				
				$\frac{l}{I}$	$\frac{x}{I}$	$\frac{x^2}{I}$	$\frac{x^3}{I}$	$\frac{x^4}{I}$
0	0,0000 l	1,0000	1,000 I_0	$1{,}000\,\frac{l}{I_0}$	$0{,}000\,\frac{l}{I_0}$	$0{,}000\,\frac{l^2}{I_0}$	$0{,}000\,\frac{l^3}{I_0}$	$0{,}000\,\frac{l^4}{I_0}$
1	0,0833	1,0000	1,000	1,000	0,083	0,007	0,001	0,000
2	0,1667	1,0000	1,000	1,000	0,167	0,028	0,005	0,001
3	0,2500	1,0000	1,000	1,000	0,250	0,063	0,016	0,004
4	0,3333	1,0000	1,000	1.000	0,333	0,111	0,037	0,012
5	0,4167	1,0000	1,000	1,000	0,417	0,174	0,072	0,030
6	0,5000	1,0000	1,000	1,000	0,500	0,250	0,125	0,063
7	0,5833	1,1183	1,399	0,715	0,417	0,243	0,142	0,083
8	0,6667	1,2367	1,892	0,529	0,352	0,235	0,157	0,104
9	0,7500	1,3550	2,488	0,402	0,301	0,226	0,170	0,127
10	0,8333	1,4733	3,198	0,313	0,261	0,217	0,181	0,151
11	0,9167	1,5917	4,033	0,248	0,227	0,208	0,191	0,175
12	1,000	1,7100	5,000	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200

obtendo-se, pela regra de Simpson

$$\int_0^1 \frac{l}{I}\,dx = 0{,}7318\,\frac{l}{I_0}\;;\quad \int_0^1 \frac{x}{I}\,dx = 0{,}2835\,\frac{l^2}{I_0}\;;\quad \int_0^1 \frac{x^2}{I}\,dx = 0{,}1546\,\frac{l^3}{I_0}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{I}\,dx = 0{,}0994\,\frac{l^4}{I_0}\;;\quad \int_0^1 \frac{x^4}{I}\,dx = 0{,}0705\,\frac{l^5}{I_0}$$

e) Carga uniformemente distribuída.

$$\text{Será } M = M_e + R_e\, x - \frac{p\, x^2}{2}$$

e substituindo no sistema (l) vem

$$\begin{cases} M_e \displaystyle\int_0^l \frac{1}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x}{I}\, dx = \frac{p}{2} \int_0^l \frac{x^2}{I}\, dx \\ M_e \displaystyle\int_0^l \frac{x}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x^2}{I}\, dx = \frac{p}{2} \int_0^l \frac{x^3}{I}\, dx \end{cases}$$

dos valores calculados no quadro II resulta

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_e + 0{,}4482\, R_e\, l = 0{,}1596\, p\, l^2 \\ 0{,}4482\, M_e + 0{,}3192\, R_e\, l = 0{,}1227\, p\, l^2 \end{cases} \quad \begin{cases} M_e = -0{,}125\, p\, l^2 \\ R_e = \quad 0{,}560\, p\, l \end{cases}$$

substituindo na expressão de M e fazendo $x = l$ vem

$$M_d = -\,0{,}125\, p\, l^2 - 0{,}500\, p\, l^2 + 0{,}560\, p\, l^2 = -\,0{,}065\, p\, l^2$$

f) Carga concentrada P na secção indicada na figura
A expressão de M será

$$\text{entre o e } \frac{2}{3}\, l \qquad M = M_e + R_e\, x$$

$$\text{entre } \frac{2}{3}\, l \text{ e } l \qquad M = M_e + R_e\, x - P\left(x - \frac{2}{3}\, l\right)$$

e substituindo no sistema (1)

$$\begin{cases} M_e \displaystyle\int_0^l \frac{1}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x}{I}\, dx = P \int_{2/3\, l}^{l} \left(x - \frac{2}{3}\, l\right) dx \\ M_e \displaystyle\int_0^l \frac{x}{I}\, dx + R_e \int_0^l \frac{x^2}{I}\, dx = P \int_{2/3\, l}^{l} \left(x - \frac{2}{3}\, lx\right) dx \end{cases}$$

Dos valores do quadro II

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_e + 0{,}4482\, R_e\, l = P\,(0{,}2778 - 0{,}667 \times 0{,}3333)\, l = 0{,}0556\, P\, l \\ 0{,}4482\, M_e + 0{,}3192\, R_e\, l = P\,(0{,}2346 - 0{,}667 \times 0{,}2778)\, l = 0{,}0494\, P\, l \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_e = -\,0{,}134\, P\, l \\ R_e = \quad 0{,}343\, P \end{cases} \qquad \text{donde } M_d = -\,0{,}134\, P\, l + 0{,}343\, P\, l - 0{,}333\, P\, l = -\,0{,}124\, P\, l$$

g) Carga triangular q

A expressão do momento será agora

$$M = M_e + R_e x - \frac{1}{6\,l}\, q\, x^3$$

obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_e + 0{,}4482\, R_e\, l = 0{,}2454\, \dfrac{q\, l^3}{6\, l} = 0{,}0409\, q\, l^2 \\[2ex] 0{,}4482\, M_e + 0{,}3192\, R_e\, l = 0{,}1986\, \dfrac{q\, l^3}{6\, l} = 0{,}0332\, q\, l^2 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} M_e = -\,0{,}054\, q\, l^2 \\ R_e = \quad 0{,}180\, q\, l \end{cases} \qquad M_d = -(0{,}054 - 0{,}180 + 0{,}167)\, q\, l^2 = -\,0{,}041\, q\, l^2$$

h) Carga triangular s

Tomando d para origem e procedendo como em *c*) teremos

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_d + 0{,}2835\, R_d\, l = \dfrac{0{,}0994}{6}\, s\, l^2 = 0{,}0166\, s\, l^2 \\[2ex] 0{,}2835\, M_d + 0{,}1546\, R_d\, l = \dfrac{0{,}0705}{6}\, s\, l^2 = 0{,}0118\, s\, l^2 \end{cases}$$

donde se tira

$$\begin{cases} M_d = -\,0{,}024\, s\, l^2 \\ R_d = \quad 0{,}120\, p\, l \end{cases} \qquad M_e = -\,0{,}071\, s\, l^2$$

i) Assentamento — Δ do apoio e, com a viga descarregada.

Como se viu, o primeiro membro das equações resolventes é sempre o mesmo e independente das cargas aplicadas. No caso de um assentamento — Δ do apoio e, teremos, de acordo com o sistema (2).

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_e + 0{,}4482\, R_e\, l = 0 \\[2ex] 0{,}4482\, M_e + 0{,}3192\, R_e\, l = -\,\dfrac{E\, I_o}{l^2}\, \Delta \end{cases}$$

donde se tira

$$\begin{cases} M_e = +\,13{,}68\, \dfrac{E\, I_o}{l^2}\, \Delta \\[2ex] R_e = -\,22{,}34\, \dfrac{E\, I_o}{l^3}\, \Delta \end{cases} \qquad M_d = -\,8{,}66\, \dfrac{E\, I_o}{l^2}\, \Delta$$

j) Assentamento $+ \Delta$ do apoio d, suposta a viga sem cargas.

Neste caso chegamos aos valores acabados de determinar àparte o sinal. Com efeito, o deslocamento relativo dos apoios é o mesmo nos dois casos.

Tomando d para origem teremos, de maneira análoga

$$\begin{cases} 0{,}7318\ M_d + 0{,}2835\ R_d\ l = 0 \\ 0{,}2835\ M_d + 0{,}1546\ R_d\ l = + \dfrac{E\ I_o}{l^2}\ \Delta \end{cases}$$

donde se tira

$$\begin{cases} M_d = + \ 8{,}66\ \dfrac{E\ I_o}{l^2}\ \Delta \\ R_d = - \ 22{,}35\ \dfrac{E\ I_o}{l^3}\ \Delta \end{cases} \qquad M = - \ 13{,}69\ \dfrac{E\ I_o}{l^2}\ \Delta$$

4 — Determinação da rigidez e do coeficiente de transmissão de vigas

A rigidez mede a resistência que um elemento apresenta à deformação quando se obriga a rodar um dos seus extremos, por aplicação de um momento exterior. É definida como o momento que é necessário aplicar num dos apoios da viga encastrada (suposto esse apoio como uma rotação fixa) para o fazer rodar do ângulo $\theta = 1$ que se considera no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio. Dá-se o nome de «coeficiente de transmissão» à relação, com o sinal trocado, entre o momento que aparece no apoio encastrado da viga e o momento aplicado no apoio suposto articulado.

Visto que agora existe uma rotação $\theta = 1$ do apoio, diferente de zero, o sistema resolvente, de acordo com o teorema de Castigliano será

$$\begin{cases} \displaystyle\int_o^l \frac{M}{E\,I}\ dx = 1 \\ \displaystyle\int_o^l \frac{M}{E\,I}\ x\ dx = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \displaystyle M_e \int_o^l \frac{1}{I}\ dx + R_e \int_o^l \frac{x}{I}\ dx = E \\ \displaystyle M_e \int_o^l \frac{x}{I}\ dx + R_e \int_o^l \frac{x^2}{I}\ dx = 0 \end{cases} \tag{3}$$

A — Vigas do momento de inércia constante

Sendo o momento de inércia constante, o sistema (3) toma a forma

$$\begin{cases} l\ M_e + \dfrac{l^2}{2}\ R_e = E\,I \\ \dfrac{l^2}{2}\ M_e + \dfrac{l^3}{3}\ R_e = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_e = \dfrac{4\,E\,I}{l} \\ R_e = - \dfrac{6\,E\,I}{l^2} \end{cases}$$

donde $M_d = \dfrac{4\,E\,I}{l} - \dfrac{6\,E\,I}{l^2}\ .\ l = - \dfrac{2\,E\,I}{l}$

A rigidez é portanto $k = \dfrac{4\,E\,I}{l}$

e o coeficiente de transmissão $\beta = - \dfrac{M_d}{M_e} = + 0{,}5$

É de notar que os momentos induzidos numa viga pelo deslocamento Δ segundo a normal à sua direcção (assentamento de um apoio), e que já anteriormente foi estudado, também medem uma rigidez: à translação, assim como a acabada de definir é a rigidez à rotação.

Entre estas duas grandezas existe a relação seguinte:

$$\text{rigidez de translação} = (1 + \beta)\, k\, \frac{\Delta}{l}\,.$$

Para o caso da viga de momento de inércia constante teremos, com efeito,

$$(1+\beta)\, k\, \frac{\Delta}{l} = (1 + 0{,}5)\, \frac{4\, E\, I}{l}\, \frac{\Delta}{l} = \frac{6\, E\, I}{l^2}\, \Delta$$

B — **Vigas de momento de inércia variável**

Neste caso temos duas rigidez e dois coeficientes de transmissão diferentes, consoante a extremidade que se considere.

No caso do exemplo anteriormente apresentado teremos, para a extremidade mais rígida

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_e + 0{,}4482\, R_e\, l = \dfrac{E\, I_o}{l} \\ 0{,}4482\, M_e + 0{,}3192\, R_e\, l = 0 \end{cases}$$

$$\text{donde} \begin{cases} M_e = \dfrac{9{,}76\, E\, I_o}{l^2} \\ R_e = -\dfrac{13{,}70\, E\, I_o}{l^2} \qquad M_d = -3{,}94\, \dfrac{E\, I_o}{l} \end{cases}$$

A rigidez será $k = \dfrac{9{,}76\, E\, I_o}{l}$

e o coeficiente de transmissão,

$$\beta = -\frac{-3{,}94}{9{,}76} = +0{,}404$$

Para a extremidade menos rígida teremos

$$\begin{cases} 0{,}7318\, M_d + 0{,}2835\, R_d\, l = \dfrac{E\, I_o}{l} \\ 0{,}2835\, M_d + 0{,}1546\, R_d\, l = 0 \end{cases}$$

$$\text{donde} \begin{cases} M_d = 4{,}73\, \dfrac{E\, I_o}{l} \\ R_d = -8{,}67\, \dfrac{E\, I_o}{l^2} \qquad M_e = -3{,}94\, \dfrac{E\, I_o}{l} \end{cases}$$

donde os seguintes valores

Rigidez $k' = 4{,}73\, \dfrac{E\, I_o}{l}$

Coeficiente de transmissão

$$\beta' = -\frac{-3{,}94}{4{,}73} = +0{,}833$$

Entre estes valores acabados de calcular verifica-se a relação

$$\beta\, k = \beta'\, k'$$

Com efeito teremos

$$0{,}404 \times \frac{9{,}76\ E\ I_o}{l} = \frac{3{,}94\ E\ I_o}{l}$$

$$0{,}833 \times \frac{4{,}73\ E\ I_o}{l} = \frac{3{,}94\ E\ I_o}{l}$$

Pelo que respeita às rigidez de translação, anteriormente determinadas, teremos

$$(1+\beta)\, k\, \frac{\Delta}{l} = 1{,}404 \times \frac{9{,}76\ E\ I_o\ \Delta}{l^2} = 13{,}70\ \frac{E\ I_o}{l^2}\ \Delta$$

$$(1+\beta')\, k'\, \frac{\Delta}{l} = 1{,}833 \times \frac{4{,}73\ E\ I_o\ \Delta}{l^2} = 8{,}67\ \frac{E\ I_o}{l^2}\ \Delta$$

que coincidem com os valores encontrados.

No caso de se tratar de uma viga de momento de inércia variável mas com simetria em relação a um eixo transversal, será $\beta = \beta'$ e $k = k'$.

5 — Determinação dos momentos de encastramento perfeito de arcos

Para os arcos, além do trabalho de flexão temos, em geral, de considerar o devido à compressão, sendo portanto

$$\tau = \int_o^l \frac{M^2\, ds}{2\ E\ I} + \int_o^l \frac{N^2}{2\ E\ \Omega}\, ds$$

a) No caso do arco perfeitamente encastrado nos apoios, tomando para incógnitas hiperestáticas as reacções H_e, V_e, M_e do apoio esquerdo (cujos sentidos positivos são os indicados na fig. 10), pode exprimir-se a condição de não se darem rotações nem deslocamentos dos apoios, mediante o teorema de Castigliano, por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial M_e} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial H_e} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial V_e} = 0 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_o^l \frac{2\,M}{2\,E\,I}\ \frac{\partial M}{\partial M_e}\, ds + \int_o^l \frac{2\,N}{2\,E\,\Omega}\ \frac{\partial N}{\partial M_e}\, ds = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_o^l \frac{2\,M}{2\,E\,I}\ \frac{\partial M}{\partial H_e}\, ds + \int_o^l \frac{2\,N}{2\,E\,\Omega}\ \frac{\partial N}{\partial H_e}\, ds = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_o^l \frac{2\,M}{2\,E\,I}\ \frac{\partial M}{\partial V_e}\, ds + \int_o^l \frac{2\,N}{2\,E\,\Omega}\ \frac{\partial N}{\partial V_e}\, ds = 0 \end{cases}$$

Tomando para referência um sistema de eixos com origem no apoio e, as expressões de M e N (fig. 10) são:

$$\begin{cases} M = M_e + V_e x - H_e y - \mathcal{M} \\ N = V_e \operatorname{sen} \varphi + H_e \cos \varphi - \mathcal{N} \end{cases}$$

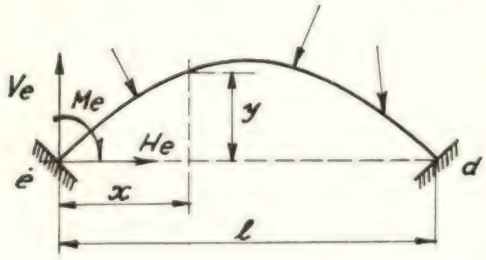


Fig. 10 — Arco encastrado nos apoios

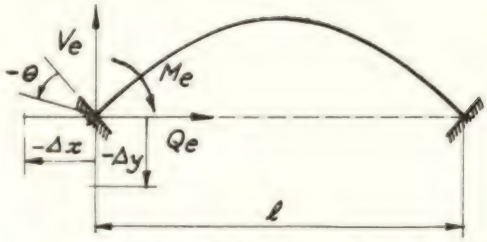


Fig. 11 — Deslocamentos do apoio esquerdo de um arco

em que:

φ é o ângulo formado pela tangente à directriz do arco na secção considerada com a horisontal ou (o que é o mesmo) o ângulo da normal à directriz do arco na secção considerada com a vertical.

$\mathcal{M}$ — o momento flector das forças situada à esquerda da secção considerada, em relação a esta.

$\mathcal{N}$ — a componente normal à secção considerada, das forças exteriores situadas à sua esquerda.

Teremos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial M_e} = 1 \\ \dfrac{\partial M}{\partial V_e} = x \\ \dfrac{\partial M}{\partial H_e} = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial M_e} = 0 \\ \dfrac{\partial N}{\partial V_e} = \operatorname{sen} \varphi \\ \dfrac{\partial N}{\partial H_e} = \cos \varphi \end{cases}$$

de modo que resulta

$$\begin{cases} \displaystyle\int_o^l \frac{M}{I}\, ds = o \\ \displaystyle -\int_o^l \frac{M}{I}\, y\, ds + \int_o^l \frac{N}{\Omega} \cos \varphi\, ds = o \\ \displaystyle\int_o^l \frac{M}{I}\, x\, ds + \int_o^l \frac{N}{\Omega} \operatorname{sen} \varphi\, ds = o \end{cases}$$

Nestas expressões, quando se tratar de arcos rebaixados, com a flecha igual ou inferior a 1/5 do vão, pode fazer-se, sem erro sensível, ds = dx. E quando aquela relação for superior a 1/5 do vão, podem desprezar-se os termos correspondentes ao esforço normal [1].

---

[1] Peña Boeuf — «Mecânica Elástica» 3.ª edição, pág. 80; Magnel considera ainda admissível a não consideração do trabalho de deformação devida a N, para relações $f/l \geq 0{,}1$.

Nestas condições visto ser $dx = \cos \varphi \, ds$, podemos, em todos os casos, desprezar os termos em sen φ resultando finalmente

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^l \frac{M_e' + V_e x - H_e y}{I} ds = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{I} ds \\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{M_e + V_e x - H_e' y}{I} y \, ds - \int_0 \frac{H_e \cos^2 \varphi}{\Omega} ds = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{I} x \, ds \\[2ex] \displaystyle\int_0^l \frac{M_e + V_e' x - H_e y}{I} x \, ds = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{I} x \, ds \end{array} \right\}$$

No caso de ser $f/l \geq 0{,}2$, pode, como se disse, desprezar também o termo em Ω, que é o único que resta do trabalho de compressão.

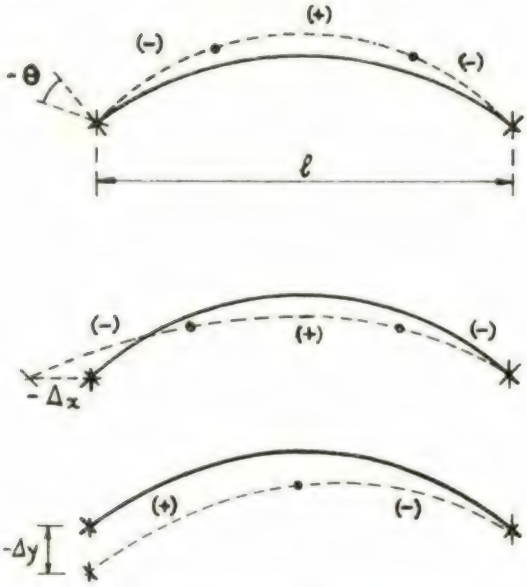


Fig. 12 — Deslocamentos do apoio esquerdo

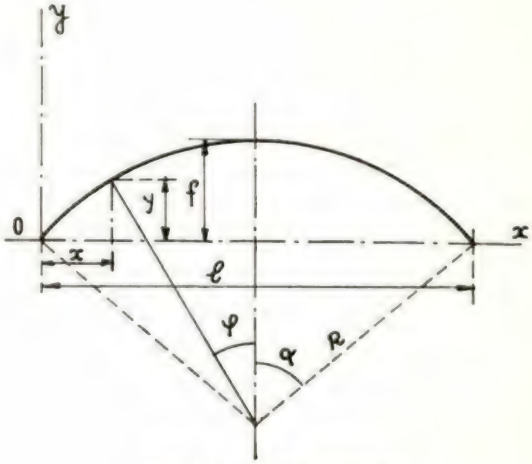


Fig. 13 — Arco circular

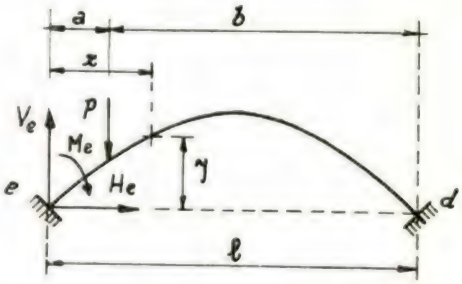


Fig. 14 — Carga concentrada vertical P

b) Consideremos agora o caso do arco sem cargas exteriores, encastrado nos dois apoios, um dos quais sofre uma rotação no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros dum relógio, um deslocamento horizontal — Δ_x um deslocamento vertical — Δ_y, como se indica nas figs. 11 e 12.

Para uma secção genérica de coordenadas (x, y) é agora apenas

$$\begin{cases} M = M_e + V_e\, x - H_e\, y \\ N = V_e \operatorname{sen} \varphi + H_e \cos \varphi \end{cases}$$

visto que $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ são nulos.

As derivadas do trabalho de deformação serão

$$\frac{\partial \tau}{\partial M_e} = -\theta \qquad \frac{\partial \tau}{\partial H_e} = -\Delta_x \qquad \frac{\partial \tau}{\partial V_e} = -\Delta_y$$

e as derivadas de M e N em relação às incógnitas hiperestáticas, as que já foram anteriormente escritas. Resulta finalmente

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^l \frac{M_e + V_e\, x - H_e\, y}{I}\, ds = -E\,\theta \\ & \int_0^l \frac{M_e + V_e\, x - H_e\, y}{I}\, y\, ds - \int_0^l \frac{H \cos^2 \varphi}{\Omega}\, ds = E\,\Delta_x \\ & \int_0^l \frac{M_e + V_e\, x - H_e\, y}{I}\, x\, ds = -E\,\Delta y \end{aligned} \right\} \qquad (5)$$

Os sistemas (4) e (5) resolvem o problema para os arcos, anàlogamente aos sistemas (1) e (2) para as vigas. Como acontecia com estas, também aqui não podem em geral calcular-se directamente os integrais, havendo que os transformar em somatórios. O problema agora complica-se um pouco mais, pois aparece no numerador dos integrais a variável ds, além do momento de inércia I no denominador. Poderemos utilizar a regra dos trapézios, a fórmula de Simpson, ou outro qualquer processo de integração aproximada, mas os pontos de divisão deverão ser tomados sobre o eixo do arco. Podemos utilizar, neste trabalho, os quadros apresentados por alguns autores [1].

Como casos em que a integração se pode fazer directamente, podemos citar o arco de directriz circular ou parabólica, de espessura constante ou variável do fecho para as nascenças segundo a lei $I \cos \varphi = I_0$ ou $\Omega \cos \varphi = \Omega_0$, sendo I_0 e Ω_0 os valores que assumem I e Ω no fecho.

No caso da directriz do arco ser uma parábola do 2.º grau, a sua equação, referida a um sistema dos eixos com origem no apoio esquerdo, é:

$$y = \frac{4\,f}{l^2}\,(lx - x^2)$$

e sendo um arco de círculo referido ao sistema de eixos indicado na fig. 13,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

---

(1) Ver G. Magnel — «Pratique du Calcul du Béton Armé» 3e. partie — Calcul des Arcs.

O sistema de equações a que chegámos não é a maneira mais prática de resolver o problema. Tomando para referência um sistema de eixos com origem no centro elástico do arco, conseguem-se separar as incógnitas, M_e, H_e, V_e, libertando-nos da resolução do sistema de equações.

Ao contrário do que acontece nos arcos de ponte, na construção corrente de betão armado recorre-se em geral a arcos de forma simples, circular ou parabólica; existe então a possibilidade de integrar exactamente as expressões gerais, podendo apresentar-se fórmulas simples aplicáveis a esses casos mais vulgares.

Em geral também a relação f/l é tal que pode desprezar-se o trabalho de deformação devido ao esforço normal, isto é, o termo em Ω dos sistemas (3) e (4). É uma hipótese que suporemos verificar-se, no que se segue. É conveniente frizar que isto não significa que sejam também desprezáveis, neste caso, as tensões devidas a N, que são de facto importantes. As tensões devidas ao esforço transverso é que são sempre pouco importantes nos arcos.

Resolução do arco parabólico com $I \cos \varphi = I_o$

Vamos considerar sucessivamente os casos de actuação de cargas verticais e horizontais, e movimentos dos apoios, com rotação ou translação destes.

c) Actuação de uma carga concentrada vertical P.
Neste caso teremos (fig. 14):

$$\text{entre } x = 0 \text{ e } x = a \quad \begin{cases} M = M_e + V_e x - H_e y \\ N = V_e \operatorname{sen} \varphi + H_e \cos \varphi \end{cases}$$

$$\text{e entre } x = a \text{ e } x = l \quad \begin{cases} M = N_e + V_e x - H_e y - P(x - a) \\ N = V_e \operatorname{sen} \varphi + H_e \cos \varphi - P \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

Substituindo no sistema (3) temos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_o^l \frac{M_e + V_e x - H_e y}{I} ds = \int_a^l \frac{P(x-a)}{I} ds \\ \displaystyle\int_o^l \frac{M_e + V_e x - H_e y}{I} y\, ds = \int_a^l \frac{P(x-a)}{I} y\, ds \\ \displaystyle\int_o^l \frac{M_e + V_e x - H_e y}{I} x\, ds = \int_a^l \frac{P(x-a)}{I} x\, ds \end{cases}$$

Passando as constantes para fora, ficamos reduzidos aos integrais que a seguir se calculam, e nos quais $dx = \cos \varphi\, ds$.

$$\int_o^l \frac{ds}{I} = \int_o^l \frac{dx}{I \cos \varphi} = \frac{l}{I_o}; \quad \int_o^l \frac{x}{I} ds = \int_o^l \frac{x\, dx}{I_o} = \frac{l^2}{2 I_o}$$

$$\int_o^l \frac{y}{I} ds = \frac{4 f}{l^2 I_o} \int_o^l (lx - x^2)\, dx = \frac{2 f l}{3 I_o}$$

$$\int_o^l \frac{y^2}{I} ds = \frac{16 f^2}{l^4 I_o} \int_o^l (lx - x^2)^2\, dx = \frac{8 f^2 l}{15 I_o}$$

$$\int_0^l \frac{x^2}{I}\, ds = \int_0^l \frac{x^2}{I_0}\, dx = \frac{l^3}{3\, I_0}$$

$$\int_0^l \frac{xy}{I}\, ds = \frac{4\, f}{l^2\, I_0} \int_0^l (lx - x^2)\, x\, dx = \frac{f\, l^2}{3\, I_0}$$

$$\int_a^l \frac{ds}{I} = \int_a^l \frac{dx}{I_0} = \frac{l - a}{I_0}\ ; \quad \int_a^l \frac{x}{I}\, ds = \int_a^l \frac{x\, dx}{I_0} = \frac{l^2 - a^2}{2\, I_0}$$

$$\int_a^l \frac{y}{I}\, ds = \frac{2\, f}{3\, l^2\, I_0} (l^3 - 3\, a^2\, l + 2\, a^3)$$

$$\int_a^l \frac{y^2}{I}\, ds = \frac{8\, f^2}{15\, l^4\, I_0} (l^5 - 6\, a^5 - 10\, a^3\, l^2 + 15\, a^4\, l)$$

$$\int_a^l \frac{xy}{I}\, ds = \frac{f}{3\, l\, 2 I_0} (l^4 - 4\, a^3 l + 3\, a^4)$$

$$\int_a^l \frac{x^2}{I}\, ds - \frac{l^3 - a^3}{3\, I_0}$$

Substituindo os valores achados temos

$$\begin{cases} l\, M_e + \dfrac{l^2}{2}\, V_e - \dfrac{2\, f\, l}{3}\, H_e = \dfrac{P\,(l^2 - a^2)}{2} - Pa\,(l - a) \\[2ex] \dfrac{2\, l\, f}{3}\, M_e + \dfrac{f\, l^2}{3}\, V_e - \dfrac{8\, l^2}{15}\, H_e = \dfrac{f\, P}{3\, l^2} (l^4 + 2\, a^3\, l - a^4 - 2\, a\, l^3) \\[2ex] \dfrac{l^2}{2}\, M_e + \dfrac{l^3}{3}\, V_e - \dfrac{f\, l^2}{3}\, H_e = \dfrac{P\,(l^3 - a^3)}{3} - \dfrac{Pa\,(l^2 - a^2)}{2} \end{cases}$$

Fazendo no numerador das fracções do 2.º membro $l = a + b$, e efectuando as operações,

$$\begin{cases} 6\, M_e + 3\, l\, V_e - 4\, f\, H_e = \dfrac{3\, P}{l}\, b^2 \\[2ex] 10\, M_e + 5\, l\, V_e - 8\, f\, H_e = \dfrac{5\, P\, b^3}{l^3} (b + 2a) \\[2ex] 3\, M_e^{\prime\prime} + 2\, l\, V_e - 2\, f\, H_e = \dfrac{P\, b^2}{l^2} (2b + 3a) \end{cases}$$

Eliminando simultâneamente M_e e V_e entre as duas primeiras equações, e M_e e H_e entre a 1.ª e a 3.ª, e substituindo os valores de H_e e V_e assim obtidos na 1.ª, obtém-se finalmente

$$\begin{cases} M_e = -\dfrac{P\,l}{2}\left(\dfrac{a}{l}\right)\left(\dfrac{b}{l}\right)^2\left(2-5\,\dfrac{a}{l}\right) \\ H_e = \dfrac{15}{4}\,\dfrac{P\,l}{f}\left(\dfrac{a}{l}\right)^2\left(\dfrac{b}{l}\right)^2 \\ V_e = P\left(1+2\,\dfrac{a}{l}\right)\left(\dfrac{b}{l}\right)^2 \end{cases}$$

Substituindo estes valores na 2.ª expressão de M resulta, para $x = l$ e $y = o$, o valor de M_d

$$\begin{cases} M_d = -\dfrac{P\,l}{2}\left(\dfrac{a}{l}\right)^2\left(\dfrac{b}{l}\right)\left(2-5\,\dfrac{b}{l}\right) \\ V_d = P - V_e \\ H_d = H_e \end{cases}$$

É de notar que V_e e V_d coincidem com o caso da viga encastrada nos apoios, de igual vão e igualmente carregada.

A partir destas expressões podemos calcular as ordenadas das linhas de influência das reacções dos apoios do arco, como se encontra no quadro IV que resume todas as características do arco parabólico que estamos estudando.

d) Actuação de uma carga concentrada horizontal P

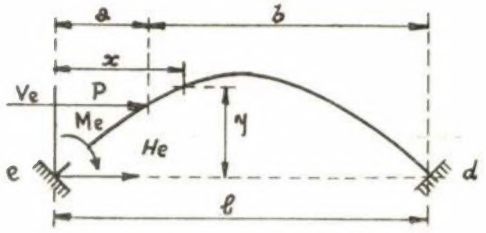


Fig. 15 — Carga concentrada vertical P

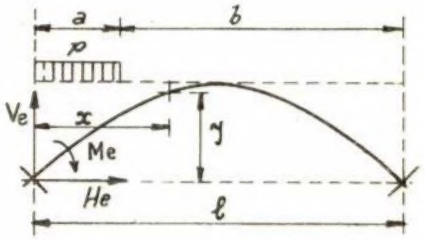


Fig. 16 — Carga uniformemente distribuida vertical

Neste caso é (fig. 15) entre $x = o$ e $x = a$

$$\begin{cases} M = M_e + V_e\,x - H_e\,y \\ N = V_e \operatorname{sen}\varphi + H_e \cos\varphi \end{cases}$$

e entre $x = a$ e $x = l$

$$\begin{cases} M = M_e + V_e\,x - H_e\,y - P\left(y - \dfrac{4\,f}{l^2}\,a\,b\right) \\ N = V_e \operatorname{sen}\varphi + H_e \cos\varphi - P \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$